תרגול 1

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

תהיי A מטריצה n - ריבועית מעל שדה $\mathbb{F}$. מספר ממשי λ נקרא ערך עצמי של A אם קיים וקטור שונה מאפס $v \in \mathbb{R}^n$ כך ש: $Av = \lambda v$.

כל וקטור המקיים תנאי זה נקרא וקטור עצמי של A, השייך לערך עצמי λ.

דוגמא 1

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ נשים לב ש $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

מכיוון ש $Av = 4v$ נקבל ש 4 ערך עצמי ו $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ השייך לערך עצמי 4.

דוגמא 2

תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ נשים לב ש $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

נשים לב שגם $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי 4.

באופן כללי גם $\begin{pmatrix} 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי 4.

הערה

אם v וקטור עצמי של A, השייך לערך עצמי λ אז גם αv וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ.

הסבר: $Av = \lambda v \Rightarrow \alpha(Av) = \alpha(\lambda v) \Rightarrow A(\alpha v) = \lambda(\alpha v)$.

הערה

אם A מטריצה הפיכה אז למערכת המשוואות $Ax = 0$ יש פתרון יחיד והוא פתרון האפס.

הסבר: אם A הפיכה אז קיימת לה מטריצה הופכית ואז נקבל ש

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 \Leftarrow Ax = 0$$

$$x = 0 \Leftarrow x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0$$

תזכורת

מטריצה ריבועית A הפיכה אם ורק אם $|A| = 0$.

מסקנה

למשוואה $Ax = 0$ יש פתרון יחיד (שהוא פתרון האפס) אם ורק אם $|A| = 0$.

דוגמאות

1. נתבונן במערכת המשוואות $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

נבדוק האם המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה.

ולכן למערכת המשוואות יש פתרון יחיד שהוא פתרון $|A|=1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=1\cdot2-2\cdot(-1)=4$
האפס $x=y=z=0$.

2. נתבונן במערכת המשוואות $\begin{cases}x+2y=0\\2x+y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$

נבדוק האם המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ הפיכה. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה.

ולכן בנוסף לפתרון $x=y=z=0$ יש למערכת המשוואות $|A|=1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot2-2\cdot1=0$
יש פתרון נוסף. למשל: $x=-2; y=1; z=3$.

<u>מציאת ערך עצמי ווקטור עצמי מתאים</u>

נקצה למצוא ערך עצמי למטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ ז"א יש למצוא וקטור שונה מאפס $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ כך ש

$\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ ולכן

$$\begin{pmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftarrow\left(\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\Leftarrow\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

מכיוון שהווקטור $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ שונה מאפס נקבל שלמשוואה $\begin{pmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ יש יותר מפתרון

אחד ואז הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{pmatrix}$ שווה לאפס.

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda-2)-6\Rightarrow\lambda^2-3\lambda-4=0.$$

למערכת המשוואות יש פתרון שהוא לא פתרון האפס כאשר $\lambda^2-3\lambda-4=0$.
הפולינום $p(\lambda)=\lambda^2-3\lambda-4$ נקרא הפולינום האופייני.

נפתור את המשוואה הנ"ל ונקבל $\lambda^2-3\lambda-4=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=4$.

הערכים העצמיים הם $\lambda=4,\lambda=-1$. לכל ערך עצמי נמצא את הווקטורים העצמיים המתאימים לו.

נמצא את הווקטורים העצמיים המתאימים לערך עצמי $\lambda=4$.

נציב $\lambda=4$ במערכת המשוואות $\begin{pmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ונקבל

$$\begin{cases}3v_1-2v_2=0\\-3v_1+2v_2=0\end{cases}\overset{R_1+R_2\to R_2}{\approx}\begin{cases}3v_1-2v_2=0\\0v_1+0v_2=0\end{cases}.\begin{cases}3v_1-2v_2=0\\-3v_1+2v_2=0\end{cases}\Leftarrow\begin{pmatrix}3&-2\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

המשתנה החופשי הוא v_2, נציב $v_2=3$ ונקבל את הפתרון $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ וכל ווקטור מהצורה $\begin{pmatrix}2t\\3t\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המשוואה. סה"כ קיבלנו שהקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}2t\\3t\end{pmatrix}: t\in\mathbb{R}\right\}$ היא קבוצת כל הווקטורים העצמיים שמתאימים לערך עצמי $\lambda=4$.

נציב $\lambda=-1$ במערכת המשוואות $\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2\\ -3 & \lambda-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ונקבל

$$\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftarrow \begin{cases}-2v_1-2v_2=0\\ -3v_1-3v_2=0\end{cases}. \begin{cases}-2v_1-2v_2=0\\ 0v_1+0v_2=0\end{cases} \overset{R_1-R_2\to R_2}{\approx} \begin{cases}-2v_1-2v_2=0\\ -3v_1-3v_2=0\end{cases}$$

המשתנה החופשי הוא v_2, נציב $v_2=1$ ונקבל את הפתרון $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ וכל ווקטור מהצורה $\begin{pmatrix}-t\\t\end{pmatrix}$ הוא פתרון של המשוואה. סה"כ קיבלנו שהקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}-t\\t\end{pmatrix}: t\in\mathbb{R}\right\}$ היא קבוצת כל הווקטורים העצמיים שמתאימים לערך עצמי $\lambda=-1$.

<u>תזכורת</u>

מטריצה B דומה למטריצה A אם קיימת מטריצה לא סינגולארית P כך ש $B=P^{-1}AP$.

נשים לב ש $B^n=\overbrace{\left(P^{-1}AP\right)\cdot\left(P^{-1}AP\right)\cdot\ldots\cdot\left(P^{-1}AP\right)}^{n-times}=P^{-1}A^nP$.

<u>הגדרה</u>

נאמר שמטריצה ריבועית A לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית D ז"א קיימת מטריצה לא סינגולארית P ומטריצה אלכסונית D כך ש $D=P^{-1}AP$.

<u>הערה</u>

אם A לכסינה אז ניתן לחשב את A^n באופן הבא: $D=P^{-1}AP \Rightarrow A=PDP^{-1} \Rightarrow A^n=PD^nP^{-1}$

ומכיוון ש D מטריצה אלכסונית ניתן לחשב את D^n בקלות ולקבל את A^n.

<u>דוגמא</u>

חשב את A^{10} כאשר $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

נשים לב ש $P^{-1}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ כאשר $P=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ ואז $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{pmatrix}$.

נראה בתרגיל הבא כיצד להראות שמטריצה היא לכסינה ואם היא לכסינה כיצד ניתן לחשב את המטריצה ההפיכה P והמטריצה האלכסונית D.

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}P^{-1} \Rightarrow A^{10}=P\begin{pmatrix}5^{10} & 0\\ 0 & (-2)^{10}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

<u>תרגיל</u>

הראה שהמטריצה $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ לכסינה ומצא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D שעבורן מתקיים השוויון $D=P^{-1}AP$.

פתרון

תחילה נמצא את הערכים העצמיים.

$$|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2\\ -3 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+1)-6=\lambda^2-3\lambda-10=(\lambda-5)(\lambda+2)$$

הערכים העצמיים הם: $\lambda=5,\lambda=-2$. נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור הערך העצמי $\lambda=-2$.

ז"א יש למצוא את הבסיס למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}-6 & -2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ שהוא $\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}\right\}$.

הבסיס של המרחב העצמי המתאים לערך העצמי $\lambda=5$ הוא הבסיס למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ שהוא $\left\{\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$.

קיבלנו שני וקטורי עצמיים בת"ל המטריצה היא 2 ריבועית ומכיוון שמספר הווקטורים העצמיים שהם בת"ל שווה לגודל המטריצה אז המטריצה ניתנת ללכסון. המטריצה האלכסונית D היא מטריצה שבאלכסון מופיעים הערכים העצמיים ז"א $\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ והמטריצה P היא המטריצה שעמודותיה הם הוקטורים העצמיים כלומר $P=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ הווקטור העצמי שמתאים לערך העצמי 5 נמצא בעמודה הראשונה מכיוון שבמטריצה האלכסונית הערך העצמי 5 מופיע בעמודה הראשונה באותו אופן ניתן להבין כיצד הגענו לעמודה השנייה.

תרגיל

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ -7 & 5 & -1\\ -6 & 6 & 2\end{pmatrix}$.

א. מצאו את הערכים העצמיים.

ב. האם A לכסינה? אם כן מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $D=P^{-1}AP$.

פתרון

סעיף א

$P_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1 & 1\\ 7 & \lambda-5 & 1\\ 6 & -6 & \lambda-2\end{vmatrix}$. נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}\lambda+3 & -1 & 1\\ 7 & \lambda-5 & 1\\ 6 & -6 & \lambda-2\end{pmatrix}\overset{R_1\leftrightarrow R_3}{\approx}\begin{pmatrix}6 & -6 & \lambda-2\\ 7 & \lambda-5 & 1\\ \lambda+3 & -1 & 1\end{pmatrix}\overset{\substack{-\frac{\lambda+3}{6}R_1+R_3\to R_3\\ -\frac{7}{6}R_1+R_2\to R_2}}{\approx}\begin{pmatrix}6 & -6 & \lambda-2\\ 0 & \lambda+2 & -\frac{7}{6}(\lambda-2)+1\\ 0 & \lambda+2 & -\frac{(\lambda+3)(\lambda-2)}{6}+1\end{pmatrix}$$

פעולת השורה היחידה שמשנה את ערך הדטרמיננטה היא החלפת שורה, ולכן יש להכפיל את הדטרמיננטה פי -1.

$$P_A(\lambda)=-\left|\begin{pmatrix}6 & -6 & \lambda-2\\ 0 & \lambda+2 & -\frac{7}{6}(\lambda-2)+1\\ 0 & \lambda+2 & -\frac{(\lambda+3)(\lambda-2)}{6}+1\end{pmatrix}\right|=-6\left[(\lambda+2)\cdot\frac{-\lambda^2-\lambda+12}{6}-\frac{(\lambda+2)(-7\lambda+20)}{6}\right]=$$

$$(\lambda+2)\left[\lambda^2+\lambda-12-7\lambda+20\right]=(\lambda+2)(\lambda^2-6\lambda+8)=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-4)$$

יש שלושה ערכים עצמיים. הערכים העצמיים הם: $-2,2,4$.

<u>סעיף ב</u>

A לכסינה, כדי למצוא את המטריצה P נמצא לכל ערך עצמי את הבסיס למרחב העצמי שלו.

$\lambda=-2$

נציב $\lambda=-2$ במטריצה $\begin{pmatrix}\lambda+3 & -1 & 1\\ 7 & \lambda-5 & 1\\ 6 & -6 & \lambda-2\end{pmatrix}$ ונקבל $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 7 & -7 & 1\\ 6 & -6 & -4\end{pmatrix}$

נדרג את המטריצה ונקבל $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 7 & -7 & 1\\ 6 & -6 & -4\end{pmatrix}\overset{\substack{7R_1-R_2\to R_2\\ 6R_1-R_3\to R_3}}{\approx}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

המשתנה החופשי הוא y. נציב $y=1$ ונקבל $x=1, z=0$ הבסיס הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

$\lambda=2$

נציב $\lambda=2$ במטריצה $\begin{pmatrix}\lambda+3 & -1 & 1\\ 7 & \lambda-5 & 1\\ 6 & -6 & \lambda-2\end{pmatrix}$ ונקבל $\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\ 7 & -3 & 1\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}$

נדרג את המטריצה ונקבל $\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\ 7 & -3 & 1\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}\overset{\substack{7R_1-5R_2\to R_2\\ 6R_1-5R_3\to R_3}}{\approx}\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\ 0 & 8 & 2\\ 0 & 24 & 6\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

המשתנה החופשי הוא z. נציב $z=4$ ונקבל $x=-1, y=-1$ הבסיס הוא $\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}\right\}$.

$\lambda=4$

נציב $\lambda = 4$ במטריצה $\begin{pmatrix} \lambda+3 & -1 & 1 \\ 7 & \lambda-5 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda-2 \end{pmatrix}$ ונקבל $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

נדרג את המטריצה ונקבל $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1-R_2\to R_2 \\ 6R_1-7R_3\to R_3}}{\approx} \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

המשתנה החופשי הוא z. נציב $z=9$ ונקבל $x=-1, y=2$ הבסיס הוא $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}\right\}$.

נקבל ש $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

תירגול 2

משפט

$A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה אם ורק אם יש ל $\mathbb{F}^n$ בסיס שמורכב מוקטורים עצמיים של A.

דוגמא למטריצה לא לכסינה

המטריצה $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$.

הפולינום האופייני הוא $(\lambda-3)(\lambda-2)^2=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda-1&1\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=|\lambda I-A|$.

הערכים העצמיים הם $\lambda=2,\lambda=3$.

עבור $\lambda=2$ נקבל את קבוצת הווקטורים העצמיים (הקבוצה הנ"ל נקראת המרחב העצמי) $\left\{t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}$.

עבור $\lambda=3$ נקבל את קבוצת הווקטורים העצמיים $\left\{t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}$.

דוגמא לשימוש בליכסון מטריצות

נתונה סדרת פיבונצי $\begin{cases}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\\a_0=a_1=1\end{cases}$.

מצא את האיבר ב 100 בסדרה.

פתרון

נסמן $v_0=\begin{pmatrix}a_1\\a_0\end{pmatrix},v_1=\begin{pmatrix}a_2\\a_1\end{pmatrix},\dots,v_n=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}$ כאשר האיברים בוקטורים הם האיברים מסדרת פיבונצי.

נרצה למצוא מטריצה A כך ש $Av_n=v_{n+1}$ כלומר $A\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+2}\\a_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}+a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}$.

נשים לב שעבור המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ אכן מתקיים $A\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{n+1}+a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}$.

ואז $Av_0=v_1,Av_1=v_2,\dots,Av_n=v_{n+1}\Leftarrow A^nv_0=v_n$.

נרצה לחשב את A^{100}.

נמצא את נערכים העצמיים והוקטורים העצמיים.

$|xI-A|=\begin{pmatrix}x-1&-1\\-1&x\end{pmatrix}=x^2-x-1$ הערכים העצמיים הם: $x_1=\frac{1+\sqrt5}{2},x_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$.

נמצא את הוקטורים העצמיים המתאימים

עבור $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ יש למצוא את הבסיס של מרחב האפס של המטריצה

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix} \Leftarrow$$ הווקטור העצמי הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}$.

$$x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \Leftarrow$$ הווקטור העצמי הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.

המטריצה ההפיכה $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.

$$v_{100}=A^{100}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=PD^{100}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>שיטה למציאת ערכים עצמיים</u>

נניח ש A לכסינה. בהינתן שיש ל A n ערכים עצמיים נקבל שקיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A=PDP^{-1}$.

$$|A|=|PDP^{-1}|=|P|\cdot|D|\cdot|P^{-1}|=|D|\cdot|P|\cdot|P|^{-1}=|D|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n$$

$$tr(A)=tr(PDP^{-1})=tr(P^{-1}PD)=trD=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$$

<u>דוגמא</u>

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ אז $\lambda_1\cdot\lambda_2=5,\ \lambda_1+\lambda_2=6 \Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=5$.

<u>תזכורת</u>

כדי למצוא ערך עצמי כלומר סקלר λ שעבורו $Av=\lambda v$ יש לפתור את המשוואה $|\lambda I-A|=0$.

כדי למצוא את הווקטורים העצמיים יש להציב כל אחד מהפתרונות שקיבלת במערכת המשוואות $Av=\lambda v$.
קבוצת הפתרון של המערכת הנ"ל נותן את כל הווקטורים העצמיים שמתאימים לערך עצמי שהצבת.

כעת נגדיר ערך עצמי ווקטור עצמי עבור העתקה ליניארית $T:V\to V$. (העתקה ליניארית היא פונקציה שעבורה $\forall v_1,v_2\in V,\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $T(v_1+\alpha v_2)=T(v_1)+\alpha T(v_2)$.)

<u>הגדרה</u>

תהא $T:V\to V$ העתקה ליניארית וסקלר λ ונניח שקיים וקטור שונה מאפס v שעבורו מתקיים $T(v)=\lambda v$. כל וקטור המקיים יחס זה נקרא וקטור עצמי של T השייך לערך העצמי λ.

<u>דוגמא</u>

תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(2x+y,y-z,2y+4z)$.

$T(1,1,-2)=3\cdot(1,1,-2)$ ולכן $(1,1,-2)$ הוא וקטור עצמי ו 3 הוא ערך עצמי.

כיצד נמצא וקטור עצמי וערך עצמי להעתקה ליניארית?

תזכורת

עבור העתקה ליניארית $T:V\to V$ קיימת מטריצה $\left[T\right]$ שנקראת ההצגה המטריצית של T כך שלכל וקטור $v\in V$ מתקיים $\left[T\right]\left[v\right]=\left[T\left(v\right)\right]$. (נזכור ש $\left[v\right]$ הוא וקטור הקואורדינטות של v ביחס לבסיס הסטנדרטי ו $\left[T\left(v\right)\right]$ הוא וקטור הקואורדינטות של $T\left(v\right)$ ביחס לבסיס הסטנדרטי.

הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של המטריצה $\left[T\right]$ הם הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של ההעתקה הליניארית $T:V\to V$.

תרגיל

תהא $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T\left(x,y,z\right)=\left(2x+y,y-z,2y+4z\right)$.

א. מצא את הערכים העצמיים של ההעתקה הליניארית.

ב. לכל ערך עצמי שמצאת בסעיף א מצא את הבסיס למרחב העצמי המתאים לו.

פתרון

א. תחילה נמצא את המטריצה $\left[T\right]$. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ הוא $\left\{\left(1,0,0\right),\left(0,1,0\right),\left(0,0,1\right)\right\}$

$$T\left(1,0,0\right)=\left(2,0,0\right)=2\cdot\left(1,0,0\right)+0\cdot\left(0,1,0\right)+0\cdot\left(0,0,1\right)$$
$$T\left(0,1,0\right)=\left(1,1,2\right)=1\cdot\left(1,0,0\right)+1\cdot\left(0,1,0\right)+2\cdot\left(0,0,1\right)$$
$$T\left(0,0,1\right)=\left(0,-1,4\right)=0\cdot\left(1,0,0\right)-1\cdot\left(0,1,0\right)+4\cdot\left(0,0,1\right)$$

ולכן $\left[T\right]=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$

נמצא את הערכים העצמיים כפי שלמדנו בשיעור שעבר.

הפולינום האופייני הוא $f_{[T]}=\left|\lambda I-\left[T\right]\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda-1&1\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\left(\lambda-2\right)^2\left(\lambda-3\right)$.

הערכים העצמיים הם $\lambda=2,\lambda=3$.

ב.עבור $\lambda=2$ הבסיס למרחב העצמי הוא $\left\{\left(1,0,0\right)\right\}$. עבור $\lambda=3$ הבסיס למרחב העצמי הוא $\left\{\left(1,1,-2\right)\right\}$.

תרגיל

תהיי $T:M_{2\times2}\left(\mathbb{R}\right)\to M_{2\times2}\left(\mathbb{R}\right)$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T\left(A\right)=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}\cdot A$. מצא את הוקטורים העצמיים והערכים העצמיים של T.

פתרון

נמצא תחילה את המטריצה המתאימה להעתקה הליניארית

$$T\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$
$$T\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$
$$T\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$
$$T\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

ואז

$$[T]=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$$ נמצא את הערכים העצמיים

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & \lambda+2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & \lambda+2\end{pmatrix}\right|=0\Rightarrow\left|\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-1)+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda+2)(\lambda-1)+1\end{pmatrix}\right|=0$$

$$\frac{1}{2}\lambda^2(\lambda+1)^2=0$$

שימו לב שיש לבדוק עבור $\lambda=1$ בנפרד.

יש שני ערכים עצמיים $\lambda=0,\lambda=-1$

אם $\lambda=0$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow B=\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

אם $\lambda=-1$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow B=\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\right\}$$

<u>תרגיל</u>

במרחב $\mathbb{R}_2[x]$ (מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל 2) נתון הבסיס:

$P_1(x)=1+x, P_2(x)=1-x, P_3(x)=x+x^2$. T היא העתקה ליניארית המעתיקה את המרחב הנ"ל לעצמו כך שמתקיים: $T(P_1(x))=1, T(P_2(x))=2+x, T(P_3(x))=x^2$.

הוכח ש $\lambda=1$ הוא ערך עצמי ומצא בסיס למרחב העצמי הנתון.

<u>פתרון</u>

נמצא את המטריצה המתאימה לפי הבסיס הסטנדרטי

$$T(1)=\frac{1}{2}\Big(T\big(P_1(x)+P_2(x)\big)\Big)=1.5+0.5x, T(x)=\frac{1}{2}\Big(T\big(P_1(x)-P_2(x)\big)\Big)=-0.5-0.5x,$$

$$T(x^2)=T(P_3(x))-\frac{1}{2}T\big(P_1(x)-P_2(x)\big)=x^2+0.5x+0.5$$

$$[T]=\begin{pmatrix}1.5 & -0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5 & 0.5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

נחשב את הערך העצמי

$\left|\begin{pmatrix}\lambda-1.5 & 0.5 & -0.5\\ -0.5 & \lambda+0.5 & -0.5\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}\right|=0$ ולכן $\lambda=1$ הוא ערך עצמי. (מכיוון שביקשו להוכיח אין צורך לפתור אלא רק להציב ולבדוק)

נחשב את הבסיס לווקטור העצמי כלומר נמצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת

$\begin{pmatrix}-0.5 & 0.5 & -0.5\\ -0.5 & 1.5 & -0.5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-0.5 & 0.5 & -0.5\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ולכן הווקטור העצמי הוא $(1,0,-1)$

שימו לב שאכן $T(1-x^2)=1-x^2$

תרגול 3

תזכורת

תהי P מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס B' במרחב וקטורי V. (ז"א לכל וקטור $v\in V$ מתקיים $P\cdot[v]_{B'}=[v]_B$) אזי עבור כל העתקה ליניארית $T:V\to V$ מתקיים $[T]_{B'}=P^{-1}[T]_B P$.

מסקנה

אם $[T]_{B'}$ לכסינה אז קיים בסיס B כך ש $[T]_B$ אלכסונית

הגדרה

העתקה ליניארית $T:V\to V$ נקראת לכסינה אם קיים בסיס B כך שהמטריצה $[T]_B$ אלכסונית.

דוגמא

הראה שהעתקה ליניארית $T:R^2\to R^2$ $T(a,b)=\left(\frac{3a-b}{2},\frac{3b-a}{2}\right)$ לכסינה ומצא בסיס B כך ש $[T]_B$ אלכסונית.

פתרון

$T(a,b)=\left(\frac{3a-b}{2},\frac{3b-a}{2}\right)$ המטריצה המתאימה לפי הבסיס הסטנדרטי היא $\begin{pmatrix}1.5 & -0.5\\ -0.5 & 1.5\end{pmatrix}$

לאחר מציאת ערכים עצמיים והפעלת אלגוריתם ללכסון מטריצה נקבל כי המטריצה המייצגת את T הינה

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

כאשר $B=\{v_1=(1,1),v_2=(1,-1)\}$

לכן לפי התכונות של מטריצה מייצגת מתקיים

$$Tv_1=v_1,Tv_2=2v_2$$

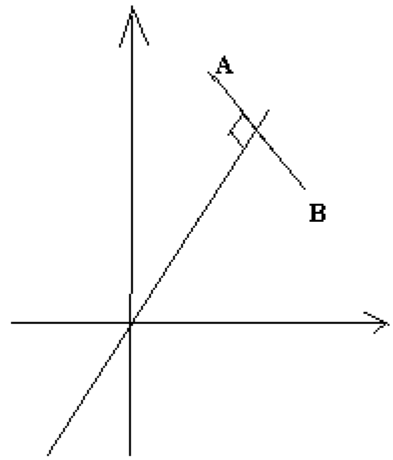
תרגיל

יהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה ליניארית אשר משקפת נקודות ביחס לישר $y=kx$ (כאשר $k\neq 0$).

א. הראה כי $v_1=(1,k),v_2=(-k,1)$ הם וקטורים עצמיים של T.

ב. הראה כי T ניתן-ללכסון, ומצא הצגה אלכסונית D כזו.

פתרון



הנקודה B היא שיקוף לנקודה A. שיפוע הישר AB הוא $-\frac{1}{k}$ ולכן משוואת הישר שעוברת שרך הנקודה (a,b) היא $y-b=-\frac{1}{k}(x-a)\Rightarrow y=-\frac{1}{k}x+\frac{a}{k}+b$.

נמצא את נקודת החיתוך עם הישר $y=kx$. $kx=-\frac{1}{k}x+\frac{a}{k}+b\Rightarrow\left(k^2+1\right)x=a+bk\Rightarrow x=\frac{a+bk}{k^2+1}$

ולכן נקודת החיתוך היא $\left(\frac{a+bk}{k^2+1},\frac{(a+bk)k}{k^2+1}\right)$ שהיא בעצם נקודת האמצע של הקטע AB.

הנקודה B היא $\left(\frac{a+2bk-ak^2}{k^2+1},\frac{-b+2ak+bk^2}{k^2+1}\right)$.

ההעתקה הליניארית היא $T(a,b)=\left(\frac{a+2bk-ak^2}{k^2+1},\frac{-b+2ak+bk^2}{k^2+1}\right)$.

המטריצה המתאימה היא $[T]=\begin{pmatrix}\frac{-k^2+1}{k^2+1} & \frac{2k}{k^2+1}\\ \frac{2k}{k^2+1} & \frac{k^2-1}{k^2+1}\end{pmatrix}$

נמצא את הערכים העצמיים

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda+\frac{k^2-1}{k^2+1} & \frac{-2k}{k^2+1}\\ \frac{-2k}{k^2+1} & \lambda-\frac{k^2-1}{k^2+1}\end{pmatrix}\right|=\lambda^2-\left(\frac{k^2-1}{k^2+1}\right)^2-\left(\frac{2k}{k^2+1}\right)^2\Rightarrow\lambda^2=\frac{k^4-2k^2+1+4k^2}{\left(k^2+1\right)^2}\Rightarrow\lambda^2=\frac{\left(k^2+1\right)^2}{\left(k^2+1\right)^2}\Rightarrow\lambda=\pm1$$

עבור $\lambda=1$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$\begin{pmatrix}1+\frac{k^2-1}{k^2+1} & \frac{-2k}{k^2+1}\\ \frac{-2k}{k^2+1} & 1-\frac{k^2-1}{k^2+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{2k^2}{k^2+1} & \frac{-2k}{k^2+1}\\ \frac{-2k}{k^2+1} & \frac{2}{k^2+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ כאשר $(1,k)$ הוא פתרון ולכן וקטור עצמי.

עבור $\lambda=-1$ נקבל שהווקטור העצמי הוא פתרון של המערכת

$$\begin{pmatrix} -1+\frac{k^2-1}{k^2+1} & \frac{-2k}{k^2+1} \\ \frac{-2k}{k^2+1} & -1-\frac{k^2-1}{k^2+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} \frac{-2}{k^2+1} & \frac{-2k}{k^2+1} \\ \frac{-2k}{k^2+1} & \frac{-2k^2}{k^2+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כאשר $(-k,1)$ הוא פתרון ולכן וקטור עצמי.

<u>פולינום אופייני</u>

תזכורת: ראינו שכדי למצוא ערכים עצמיים למטריצה A יש לפתור את המשוואה $|\lambda I-A|=0$.

<u>הגדרה</u>

הפולינום האופייני של מטריצה A מוגדר כ $p_A(\lambda)=|\lambda I-A|$.

<u>הערה</u>

עבור העתקה ליניארית $T:V\to V$ נבחר בסיס כלשהו B ונבנה את המטריצה המייצגת $[T]_B^B$ נגדיר את הפולינום האופייני של ההעתקה הליניארית ע"י $p_T(\lambda)=\left|\lambda I-[T]_B^B\right|$.

נראה שהפולינום האופייני מוגדר היטב ז"א שהוא אינו תלוי בבחירת הבסיס.

ניקח בסיס אחר E ונתבונן במטריצה $[T]_E^E$.

בסמסטר א ראינו שהמטריצות $[T]_B^B$, $[T]_E^E$ דומות, כלומר קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $[T]_E^E=P^{-1}[T]_B^B P$.

ראינו בהרצאה שלמטריצות דומות אותו פולינום אופייני ולכן $p_T(\lambda)$ מוגדר היטב ואינו תלוי בבחירת הבסיס.

<u>תרגיל</u>

הוכח, לכל מטריצה ריבועית $A\in M_n(F)$ מתקיים $p_{\alpha A}(\lambda)=\alpha^n p_A\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$.

<u>פתרון</u>

מהגדרת הפולינום האופייני נקבל ש $p_{\alpha A}(\lambda)=|\lambda I-\alpha A|,\ p_A\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)=\left|\frac{\lambda}{\alpha}I-A\right|$.

ראינו בסמסטר קודם שלכל מטריצה ריבועית $B\in M_n(F)$ מתקיים $|\alpha B|=\alpha^n|B|$.

נסמן $B=\frac{\lambda}{\alpha}I-A$ ואז $\alpha B=\lambda I-\alpha A$. סה"כ נקבל ש $p_{\alpha A}(\lambda)=|\alpha B|=\alpha^n|B|=\alpha^n p_A\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$.

<u>חילוק פולינומים</u>

בהרצאה הוכחתם שלכל שני פולינומים $f(x),g(x)$ קיימים פולינומים r,q כך שמתקיים:

1. $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$.
2. $\deg r(x)<\deg g(x)$.

<u>תרגיל</u>

הוכח ש $r(x)$ מהמשפט הקודם הוא יחיד.

<u>פתרון</u>

נניח שקיימים $r_1(x),r_2(x),q_1(x),q_2(x)$ שמקיימים את שני התנאים.

כלומר: $f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=q_2(x)g(x)+r_2(x)\Rightarrow q_1(x)g(x)-q_2(x)g(x)=r_2(x)-r_1(x)$

מצד אחד $\deg(r_2(x)-r_1(x))=\deg(g(x)(q_1(x)-q_2(x)))$, מצד שני $\deg(r_2(x)-r_1(x))<\deg g(x)$.

סה"כ קיבלנו ש $\deg g(x) > \deg\left(g(x)\left(q_1(x)-q_2(x)\right)\right)$.
מעלה של מכפלה של פולינומים קטנה ממעלה של אחד מהגורמים במכפלה אם ורק אם היא שווה לאפס.
סה"כ קיבלנו ש $q_1(x)g(x)-q_2(x)g(x)=0 \Leftarrow r_1(x)=r_2(x)$.

<u>**הגדרה**</u>

עבור 2 פולינומים f,g אנו אומרים שפולינום מתוקן d הוא המחלק המשותף המקסימלי (gcd) שלהם אם הוא מחלק את f,g ולכל פולינום מתוקן h שמחלק את f,g h מחלק אותו.

<u>**טענה**</u>

d מההגדרה קיים והוא יחיד.

<u>**הוכחה**</u>

נשתמש בתרגיל הקודם ובמשפט מההרצאה.
נתונים שני פולינומים f,g יש להוכיח שקיים להם מחלק משותף מקסימלי.
על פי המשפט מההרצאה והתרגיל הקודם קיימים פולינומים יחידים r,q כך שמתקיים $f=qg+r$, באותו אופן ניתן למצוא q_1,r_1 כך ש $g=q_1r+r_1$ כעת ניתן למצוא q_2,r_2 עבור r,r_1 וכן הלאה...
בכל שלב $\deg r_{n+1} < \deg r_n$, ולכן ניתן לבצע לכל היותר $\deg g+1$ צעדים כאלה.
ברגע ש $r_{n+1}|r_n$ אנו מקבלים ש r_{n+1} מחלק את כל הקודמים, כולל הפולינומים f,g והוא המחלק המשותף המקסימלי.

<u>**הערה**</u>

ע"י הצבה לאחור של הפולינומים המתקבלים מההוכחה נקבל כי d ניתן לבטא כביטוי מהצורה $a(x)f(x)+b(x)g(x)$.

<u>**דוגמא**</u>

נמצא את המחלק המשותף של $f(x)=3x^3+7x^2+x+1, g(x)=x^2+2x+2$.
שלב 1: $3x^3+7x^2+x+1=(3x+1)(x^2+2x+2)-7x-1$.
בשלב 1 $g(x)=x^2+2x+1, r(x)=-7x-1$.
שלב 2: $x^2+2x+2=\left(-\frac{1}{7}x-\frac{13}{49}\right)(-7x-1)+\frac{85}{49}$.
בשלב 2 $r(x)=-7x-1, r_1(x)=\frac{85}{49}$.
$r_1|r$ ואז המחלק המשותף המקסימלי $r_1(x)=\frac{85}{49}$ והפולינום המתוקן הוא 1.
בעזרת הצבה לאחור נקבל:
משלב 2: $x^2+2x+2-\left(-\frac{1}{7}x-\frac{13}{49}\right)(-7x-1)=\frac{85}{49}$
משלב 1: $3x^3+7x^2+x+1-(3x+1)(x^2+2x+2)=-7x-1$
נציב ונקבל
$$x^2+2x+2-\left(-\frac{1}{7}x-\frac{13}{49}\right)\left(3x^3+7x^2+x+1\right)-(3x+1)\left(x^2+2x+2\right)=\frac{85}{49}$$
$$\left(\frac{1}{7}x+\frac{13}{49}\right)\left(3x^3+7x^2+x+1\right)+\left(\left(-\frac{1}{7}x-\frac{13}{49}\right)(3x+1)+1\right)\left(x^2+2x+2\right)=\frac{85}{49}$$

<u>**הגדרה**</u>

שני פולינומים f,g שהמחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1 נקראים זרים.

<u>**תרגיל**</u>

הוכח שאם f, g זרים, $g|fh$ עבור פולינום כלשהו h אז $g|h$.

<u>**פתרון**</u>

מההערה הקודמת קיימים a, b כך ש $a(x)f(x)+b(x)g(x)=1$.

$h = h\cdot 1 = h(af + bg) = afh + bgh$.

נתון ש $g|fh$ כלומר קיים פולינום c כך ש $fh = cg$.

$h = h\cdot 1 = acg + bgh = g(ac + bh)$.

תרגול 4

ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי

הגדרה

1. תהיי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נניח ש $P_A(x)=(x-\lambda_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k)^{l_k}$. l_i נקרא הריבוי האלגברי של λ_i.
2. לכל λ_i ערך עצמי של A הריבוי הגיאומטרי של λ_i שווה למימד של המרחב העצמי של λ_i.

משפט

תהיי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נסמן: m_λ ריבוי אלגברי של ערך עצמי λ. k_λ ריבוי גיאומטרי של ערך עצמי λ.
אזי: $1\le k_\lambda\le m_\lambda\le n$.

מסקנה

אם למטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ יש n ערכים עצמיים שונים אז A לכסינה.

הוכחה

לכל ערך עצמי λ: $P_A(x)=(x-\lambda_1)^1\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k)^1$ ז"א $m_\lambda=1$ ולכן $1\le k_\lambda\le 1 \Leftarrow k_\lambda=1$.
לכל ערך עצמי יש וקטור עצמי יחיד ובסה"כ יש n וקטורים עצמיים בת"ל ז"א A לכסינה.

תרגיל

נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}$.

א. מצא את כל הערכים העצמיים של A והריבויים האלגבריים והגיאומטריים שלהם.

ב. הסבר מדוע A לכסינה ומצא מטריצה P הפיכה ומטריצה אלכסונית D כך ש $D=P^{-1}AP$.

ג. מצא בסיס של R^3 שאיבריו הם הווקטורים העצמיים של A.

פתרון

נחשב את הפולינום האופייני $P_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda+3&-1&-1\\-1&\lambda+3&-1\\-1&-1&\lambda+3\end{pmatrix}\right|$.

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}\lambda+3&-1&-1\\-1&\lambda+3&-1\\-1&-1&\lambda+3\end{pmatrix}\overset{R_1\leftrightarrow R_3}{\approx}\begin{pmatrix}-1&-1&\lambda+3\\-1&\lambda+3&-1\\\lambda+3&-1&-1\end{pmatrix}\overset{\substack{-R_1+R_2\to R_2\\(\lambda+3)R_1+R_3\to R_3}}{\approx}\begin{pmatrix}-1&-1&\lambda+3\\0&\lambda+4&-\lambda-4\\0&-\lambda-4&(\lambda+3)^2-1\end{pmatrix}$$

ה

$$\overset{R_2+R_3\to R_3}{\approx}\begin{pmatrix}-1&-1&\lambda+3\\0&\lambda+4&-\lambda-4\\0&0&\lambda^2+5\lambda+4\end{pmatrix}$$

פעולה האלמנטארית היחידה שמשנה את ערך הדטרמיננטה היא החלפת השורות.

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda+3&-1&-1\\-1&\lambda+3&-1\\-1&-1&\lambda+3\end{pmatrix}\right|=-\left|\begin{pmatrix}-1&-1&\lambda+3\\0&\lambda+4&-\lambda-4\\0&0&(\lambda+4)(\lambda+1)\end{pmatrix}\right|.$$

במטריצה משולשית מכפלת האלכסון נותנת את הדטרמיננטה

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda+3 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+3\end{pmatrix}\right| = (\lambda+4)^2(\lambda+1).$$

קיבלנו שני ערכים עצמיים.

$\lambda=-1$ ריבוי אלגברי 1. הריבוי הגיאומטרי גדול או שווה ל 1 וקטן או שווה לריבוי האלגברי ואז הריבוי הגיאומטרי הוא 1.

$\lambda=-4$ ריבוי אלגברי 2.

נמצא את הריבוי הגיאומטרי, ז"א את המימד של המרחב העצמי.

נציב $\lambda=-4$ במטריצה $\begin{pmatrix}\lambda+3 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+3\end{pmatrix}$ ונקבל $\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$. נמצא את המימד של מרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix} \overset{\substack{R_1-R_2\to R_2\\ R_1-R_3\to R_3}}{\approx} \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

יש שני משתנים חופשיים, ולכן המימד של מרחב האפס הוא 2 והריבוי הגיאומטרי הוא 2.

<u>סעיף ב</u>

נמצא את הבסיס של המרחב העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=-1$.

נציב $\lambda=-1$ במטריצה $\begin{pmatrix}\lambda+3 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+3 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+3\end{pmatrix}$ ונקבל $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

נמצא את הבסיס של מרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

נדרג את המטריצה
$$\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix} \overset{\substack{R_1+2R_2\to R_2\\ R_1+2R_3\to R_3}}{\approx} \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix} \overset{\substack{R_2+R_3\to R_3\\ \frac{1}{3}R_2\to R_2}}{\approx} \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

המשתנה החופשי z.

נבחר $z=1$ ואז $y=1, x=1$ הבסיס הוא $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

נמצא את הבסיס של המרחב העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=-4$.

מסעיף א יש למצוא בסיס למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

המשתנים החופשיים הם y, z.

נבחר $y=1, z=0$ ואז $x=-1$. נבחר $y=0, z=1$ ואז $x=-1$.

הבסיס הוא $B=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

$P=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

סעיף ג

מסעיף ב נקבל את הבסיס $B=\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

תרגיל

א. הראו כי אם A הפיכה ו λ ערך עצמי של A אז ל A^{-1} יש ערך עצמי λ^{-1}.

ב. נתון כי ל A יש ערכים עצמיים $\lambda=3, \lambda=-1$ מה הם הערכים העצמיים של $A^2, A-4I, A+2I$.

פתרון

סעיף א

אם λ ערך עצמי של A אז קיים וקטור שונה מאפס v כך ש

$Av=\lambda v \Leftarrow A^{-1}v=\lambda^{-1}A^{-1}(\lambda v)=\lambda^{-1}A^{-1}(Av)=\lambda^{-1}v$ כדרוש.

סעיף ב

קיימים וקטורים שונים מאפס v_1, v_2 כך ש $Av_1=3v_1, Av_2=-v_2$.

$$A^2v_1=A(Av_1)=A(3v_1)=3Av_1=9v_1$$
$$A^2v_2=A(Av_2)=A\cdot(-v_2)=-Av_2=v_2$$

הערכים העצמיים של A^2 הם $1,9$.

$$(A+2I)v_1=Av_1+2v_1=3v_1+2v_1=5v_1$$
$$(A+2I)v_2=Av_2+2v_2=-v_2+2v_2=v_2$$

הערכים העצמיים של $A+2I$ הם $1,5$.

$$(A-4I)v_1=Av_1-4v_1=3v_1-4v_1=-v_1$$
$$(A-4I)v_2=Av_2-4v_2=-v_2-4v_2=-5v_2$$

הערכים העצמיים של $A-4I$ הם $-1,-5$.

תרגיל

תהי $T:V\to V$ העתקה נילפוטנטית. מצא את כל המקרים שבהם הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי.

פתרון

נוכיח תחילה שהערך העצמי היחידי הוא "0".

נניח שקיים ערך עצמי $\lambda \neq 0$ ז"א קיים $v \neq 0$ כך ש $T(v)=\lambda v \Leftarrow T^n(v)=\lambda^n v$ ולכן לא קיים $n \in N$ כך ש $T^n(v)=0$ בסתירה לכך ש $T:V \to V$ נילפוטנטית.
אם ריבוי הגיאומטרי של "0" שווה לריבוי האלגברי של "0", אזי כל וקטור מתאפס ע"י T ו T הוא בהכרח העתקת ה "0"

<u>תרגיל</u>

יהי $P_3[x]$ מרחב כל הפולינומים במשתנה אחד ממעלה קטנה או שווה ל 3.
תהי $D:P_3[x] \to P_3[x]$ המוגדרת ע"י גזירת פולינום. מצא את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי λ.

<u>פתרון</u>

D העתקה נילפוטנטית, ולכן הערך העצמי היחידי שלה (לפי תרגיל קודם) הוא "0", ולכן הריבוי האלגברי שלה הוא 4. פולינום מתאפס ע"י גזירה אם ורק אם הוא פולינום קבוע והריבוי הגיאומטרי הוא "1".

<u>משפט</u>

הפולינום האופייני של $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$:

א. מתוקן ומעלתו n.

ב. אם $p_A(x):=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ אז $a_0=(-1)^n|A|$ ו $a_{n-1}=-tr(A)$.

<u>תרגיל ממבחן 2012 מועד א</u>

מצא את הערכים העצמיים של המטריצה $A^{\bar{t}} \cdot A$, כאשר A היא מטריצת שורה $(a_1,...,a_n) \in C^{1 \times n}$.

<u>פתרון</u>

אם $n=1$ אז הערך העצמי הוא פשוט a_1^2.
נניח ש $n>1$
מכיוון ש $rank(BA) \leq rank(A)$ ו $rank(A)=1$ נקבל ש $rank(A^t A) \leq 1$.
מכיוון ש $n>1$ נקבל שהמימד של מרחב האפס של $A^{\bar{t}} A$ שונה מאפס מכיוון ש $\dim(N(A^t A))=n-rank(A^t A) \geq n-1>0$ ולכן 0 הוא ערך עצמי של המטריצה $A^{\bar{t}} A$ עם ריבוי גיאומטרי גדול או שווה ל $n-1$.
אם הריבוי הגיאומטרי שווה ל n אז $A^{\bar{t}} A$ היא מטריצת האפס ו 0 הוא ערך עצמי שלה.
אם הריבוי הגיאומטרי שווה ל $n-1$ אז הריבוי האלגברי הוא לפחות $n-1$ ז"א הפולינום האופייהי הוא מהצורה $p_A(x)=x^{n-1}(x-a)=x^n-ax^{n-1}$ (שימו לב שהפולינום מתוקן וייתכן ש $a=0$) ומכיוון שהפולינום האופייני ממעלה n אז המקדם של המשתנה $n-1$ שווה ל $tr(A^t A)$ ז"א הערך העצמי השני הוא $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

<u>משפט</u>

כאשר $p_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים ליניאריים
A לכסינה $\Leftrightarrow$ הריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי שווה לריבוי האלגברי שלו.

<u>תרגיל</u>

הוכח או הפרך: אם לשתי מטריצות יש אותו פולינום אופייני אזי הם דומות.

<u>פתרון</u>

לא נכון.

דוגמא נגדית: ניקח בלוק ז'ורדן $J_n(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ . & & . & . & 1 \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$ הפולינום האופייני שלו הוא $(\lambda-1)^n$.

הריבוי האלגברי של הערך עצמי הוא n והריבוי הגיאומטרי הוא 1 ז"א $J_n(\lambda)$ לא לכסינה ובפרט לא דומה למטריצה האלכסונית λI. הפולינום האופייני של המטריצה λI הוא $(\lambda-1)^n$.

הראינו שתי מטריצות דומות עם פולינום אופייני זהה והפרכנו את הטענה.

<u>תרגיל</u>

תהיי A מטריצה ממשית מסדר 3 כך ש A אינה הפיכה, ומתקיים $|A-2I|=|A+2I|=0$.

הוכח כי A לכסינה.

<u>פתרון</u>

מכיוון ש A אינה הפיכה נקבל ש $\lambda=0$ ערך עצמי.

מכיוון ש $|A-2I|=|A+2I|=0$ נקבל ש $\lambda=2,\lambda=-2$ ערכים עצמיים.

קיבלנו שלושה ערכים עצמיים שונים והמטריצה מסדר 3, סה"כ המטריצה לכסינה.

<u>**תרגול 5**</u>

<u>משפט השילוש</u>

$A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ דומה למטריצה משולשית עליונה $\Leftrightarrow$ $p_A(\lambda)$ מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{F}$.

<u>אלגוריתם לשילוש מטריצה</u>

שלב 1: ניקח את האיחוד של הבסיסים למרחבים העצמיים E ונשלים אותו לבסיס B.

שלב 2: נשים את וקטורי B בעמודות מטריצה P ונביט במטריצה $Q=P^{-1}AP$.

שלב 3: נסמן $k=|E|$. נסמן ב Q_k את המטריצה המתקבלת מ Q על ידי מחיקת k השורות הראשונות ו k העמודות הראשונות.

שלב 4:

אפשרות 1 - Q_k משולשית עליונה, במקרה זה נעבור לשלב 5.

אפשרות 2 - Q_k לא משולשית עליונה, במקרה זה נחזור לשלב 1 ונמשיך בתהליך עד שנקבל מטריצה שהיא משולשית עליונה. נשים לב שסדר המטריצה Q_k קטן ממש מסדר המטריצה Q, מכיוון שמטריצה מסדר 1 היא משולשית עליונה התהליך הרקורסיבי יסתיים. לאחר סיום התהליך הרקורסיבי נקבל מטריצה P_1 שעבורה $Q_k=P_1^{-1}AP_1$.

שלב 5: נסמן $P_1'=I_k\oplus P_1$, כאשר I_k הינה המטריצה היחידה מגודל k.

שלב 6: המטריצה $P_1'^{-1}P^{-1}APP_1'=(PP_1')^{-1}A(PP_1')$ היא משולשית עליונה.

<u>דוגמא</u>

נשלש את המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}-1&-3&-4&-5\\1&1&-1&-3\\2&5&9&12\\-1&-2&-3&-3\end{pmatrix}$$

ראשית נמצא את הפולינום האופייני:

$$P_A(x)=(x-1)^2(x-2)^2$$

הפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינאריים, לכן המטריצה ניתנת לשילוש.

הערכים העצמיים הינם 1,2.

לאחר חישוב בסיסים לערכים העצמיים אנו מקבלים: $V_1=span\{(1,-2,1,0)\}, V_2=span\{(1,0,-2,1)\}$.

נסמן $E=\{(1,-2,1,0),(1,0,-2,1)\}$ ונשלים אותו לבסיס.

$B=\{(1,-2,1,0),(1,0,-2,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

נסמן

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-2&0&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

וכעת נקבל

$$Q = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 2 & -4.5 & -6.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 3.5 \end{pmatrix}.$$

נסמן $Q_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & -2.5 \\ 1.5 & 3.5 \end{pmatrix}$ במקרה זה קיבלנו מטריצה לכסינה ועבור $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -0.6 \end{pmatrix}$ נקבל $P_1^{-1}Q_2P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

לבסוף נסמן $P_1' = I_2 \oplus P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -0.6 \end{pmatrix}$.

סה"כ נקבל

$$P_1'^{-1} P^{-1}APP_1' = (PP_1')^{-1}A(PP_1') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -0.4 \\ 0 & 2 & 2 & -0.6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

משפט קיילי המילטון

אם $p_A(x)$ הוא הפלינום האופייני של מטריצה A אז $p_A(A) = 0$.

תרגיל

נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ הוכח כי $A^5 = 13A^3 - 12A^2$.

פתרון

נמצא תחילה את הפולינום האופייני של A ונקבל $p_A(x) = x^2(x-1)(x-3)$. ממשפט קיילי המילטון נקבל ש $p_A(A) = 0$ כלומר $A^2(A-I)(A-3I) = 0 \Leftarrow A^4 = 4A^3 - 3A^2$ נכפול פי A בשני האגפים ונקבל $A^5 = 4A^4 - 3A^3$ הראינו ש $A^4 = 4A^3 - 3A^2$ ולכן $A^5 = 4\cdot(4A^3 - 3A^2) - 3A^3 = 13A^3 - 12A^2$.

תרגיל

תהא A מטריצה מרוכבת $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & i & i \\ 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

א. הוכח ש A ניתנת ללכסון.
ב. הוכח ש A דומה ל A^t.
ג. מצא מספרים מרוכבים a,b,c,d כך ש $A^{-1} = aI_4 + bA + cA^2 + dA^3$.

פתרון

סעיף א

A מטריצה משולשת עליונה, לכן האיברים על האלכסון הם הערכים העצמיים.
הערכים העצמיים של A הם $\lambda_1=1,\lambda_2=i,\lambda_3=-i,\lambda_4=-1$
ל A 4 ערכים עצמיים שונים כסדר המטריצה A.
בהרצאה ראיתם שאם למטריצה מסדר n יש n ערכים עצמיים שונים אז היא לכסינה.

<u>סעיף ב</u>

הוכחנו בסעיף קודם כי A לכסינה, לכן קיימת P הפיכה ו D אלכסונית המקיימות $D=P^{-1}AP$.
נקבל ש $A=PDP^{-1} \Leftarrow A^t=\left(PDP^{-1}\right)^t \Leftarrow A^t=\left(P^t\right)^{-1}D^tP^t$.
נסמן $P^t=Q$, מכיוון ש D מטריצה אלכסונית $D^t=D$ ואז נקבל $A^t=Q^{-1}DQ$.
קיבלנו כי A,A^t דומות לאותה מטריצה D ומטרנזיטביות בדמיון מטריצות נקבל ש A,A^t דומות.

<u>סעיף ג</u>

ראינו כי 0 אינו ערך עצמי של A, לכן A הפיכה וקיימת A^{-1}.
מסעיף א נקבל שהפולינום האופייני של A : $p_A(x)=(x-1)(x-i)(x+i)(x+1)=x^4-1$.
לפי משפט קיילי המילטון A שורש של הפולינום האופייני של A, לכן
$A^4-I=0 \Rightarrow A^4=I \Rightarrow AA^3=I \Rightarrow A^{-1}=A^3$.
לכן $a=b=c=0,d=1$.

<u>הגדרה</u>

תהי A מטריצה ריבועית. הפולינום המינימלי של A, מסומן $m_A(x)$, הוא הפולינום המתוקן מהדרגה הנמוכה ביותר המקיים $m_A(A)=0$.

<u>הערה</u>

פולינום מתוקן הינו פולינום מהצורה $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, כלומר המקדם של המשתנה בעל החזקה הגבוהה ביותר הינו אחד.

<u>תכונות</u>

1. לכל פולינום f כך ש $f(A)=0$ מתקיים $m_A(x)|f(x)$, בפרט ממשפט קיילי-המילטון נובע כי הפולינום המינימלי מחלק את הפולינום האופייני.
2. לפולינום האופייני והפולינום המינימלי בדיוק אותם גורמים אי פריקים. בפרט, השורשים של הפולינום המינימלי הם הערכים העצמיים של המטריצה.

<u>מסקנה</u>

על מנת לחשב את הפולינום האופייני, נמצא את הפולינום המכיל את הגורמים האי פריקים של הפולינום האופייני, בחזקות הכי נמוכות, המאפס את המטריצה.

<u>תרגיל</u>

הוכח כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

<u>פתרון</u>

תחילה נוכיח שאם המטריצות A,B דומות אז לכל פולינום f המטריצות $f(A),f(B)$ דומות.
נסמן $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$. מכיוון ש A,B דומות קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A=P^{-1}BP$ ואז לכל n טבעי מתקיים $A^n=P^{-1}B^nP$.

$$f(A)=f\left(P^{-1}BP\right)=a_n\left(P^{-1}BP\right)^n+a_{n-1}\left(P^{-1}BP\right)^{n-1}+...+a_1\left(P^{-1}BP\right)+a_0$$
$$=a_n\left(P^{-1}B^nP\right)+a_{n-1}\left(P^{-1}B^{n-1}P\right)+...+a_1\left(P^{-1}BP\right)+a_0=P^{-1}\left(a_nB^n+a_{n-1}B^{n-1}+...+a_1B+a_0\right)P=P^{-1}f(B)P$$

המטריצה היחידה הדומה למטריצת האפס הינה מטריצת האפס עצמה.
אם A,B דומות אז $f(A),f(B)$ דומות ולכן $f(A)=0$ אם ורק אם $f(B)=0$.

כיוון שהפולינומים המאפסים מטריצות דומות הם אותם פולינומים, בפרט המינימלי המתוקן מביניהם הוא אותו אחד.

<u>תרגיל</u>

תהי A ריבועית כך שהפולינום המינימלי שלה הינו $m_A(x)=(x-1)^2$.

יהא $f(x)=x^2+4x+3$ הוכח כי המטריצה $f(A)$ הפיכה.

<u>פתרון</u>

$f(A)=A^2+4A+3I=(A-I)^2+6A+2I=6A+I$.

נוכיח ש $|f(A)|\neq 0$ ואז המטריצה $f(A)$ הפיכה.

נניח בשלילה ש $|f(A)|=0$ ז"א $|6A+I|=0 \Leftarrow \left|A-\frac{-1}{3}I\right|=0$ ואז $-\frac{1}{3}$ הוא ערך עצמי של המטריצה, אבל הוא אינו שורש של הפולינום המינימלי הנתון.

<u>תרגיל</u>

תהי A מטריצה אידמפוטנטית, כלומר $A^2=A$.

1. מהן האפשרויות לפולינום המינימלי של A ולערך עצמי של A?
2. הוכח כי הפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים.
3. מהן האפשרויות עבור $tr(A)$?

<u>פתרון</u>

<u>סעיף 1</u>

השוויון $A^2=A$ שקול לכך שהפולינום $f(x)=x^2-x$ מאפס את המטריצה A.

כיוון שהפולינום המינימלי מחלק כל פולינום המאפס את המטריצה, האפשרויות לפולינום המינימלי הן:

$f_1(x)=x,\ f_2(x)=x-1,\ f_3(x)=x(x-1)$.

<u>סעיף 2</u>

כיוון שהגורמים האי פריקים של הפולינום האופייני מופיעים בפולינום המינימלי, ומכיוון שהפולינום המינימלי כאן מכיל רק גורמים ליניאריים, הפולינום האופייני חייב להתפרק לגורמים ליניאריים.

<u>סעיף 3</u>

כיוון שהפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים, המטריצה ניתנת לשילוש. כיוון שלמטריצות דומות אותו trace, נובע שה trace של המטריצה ניתנת לשילוש הוא סכום הערכים העצמיים כולל חזרות.

מכיוון שהערכים העצמיים מופיעים על האלכסון של הצורה המשולשית.

סה"כ נקבל שהאפשרויות ל trace הן כל מספר טבעי בין 0 ל n,

כתלות בריבוי האלגברי של הערך העצמי 1.

ניתן למצוא דוגמאות עבור כל אחד מהמקים.

<u>תרגיל</u>

מצא את הפולינום המינימלי של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

הפולינום האופייני הוא $P_A(x)=(x-1)^2(x-2)$.

לכן שתי האפשרויות היחידות לפולינום המינימלי הן:

$(x-1)^2(x-2)$, $(x-1)(x-2)$.

נציב את המטריצה בפולינום $(x-1)(x-2)$ ואכן נקבל אפס.

הפולינום המינימלי הוא $m_A(x)=(x-1)(x-2)$.

תרגיל

הוכח כי הפולינום המינימלי של מטריצת הבלוקים $A\oplus B=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$ הוא $lcm(m_A(x),m_B(x))$.

פתרון

לכל פולינום f מתקיים $f(A\oplus B)=f(A)\oplus f(B)$.

לכן אם $f(A\oplus B)=0$ אזי $f(A)=0$ וגם $f(B)=0$.

לכן $m_A(x)|f(x)$ וגם $m_B(x)|f(x)$, כלומר f הוא כפולה משותפת של $m_A(x),m_B(x)$.

כל כפולה משותפת של הפולינומים המינימליים תאפס את מטריצת הבלוקים.

המינימלי מבין כל הכפולות המשותפות הוא $lcm(m_A(x),m_B(x))$.

תרגיל

יהי $V=P_2[\mathbb{R}]$ (ז"א מרחב הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ ממעלה קטנה או שווה ל 2) ותהיי $T:V\to V$ המוגדרת ע"י $T(p(x))=p(x)+(x+1)p'(x)-x^2p''(x)$ כאשר $p'(x)$ היא הנגזרת הראשונה של $p(x)$ ו $p''(x)$ היא הנגזרת השנייה של $p(x)$.

א. חשבו את המטריצה $[T]$ ביחס לבסיס הסטנדרטי $\{1,x,x^2\}$.

ב. חשבו את הערכים העצמיים של T.

ג. חשבו את הפולינום המינימלי של T.

פתרון

סעיף א

נמצא תחילה את המטריצה המייצגת ביחס לבסיס הסטנדרטי.

$$\begin{aligned}T(1)&=1+0\cdot x+0\cdot x^2\\ T(x)&=1+2\cdot x+0\cdot x^2\\ T(x^2)&=0\cdot 1+2\cdot x+1\cdot x^2\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad [T]=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

סעיף ב

המטריצה משולשית עליונה ולכן הפולינום האופייני הוא $p_A(x)=(x-1)^2(x-2)$

הערכים העצמיים הם: 1,2.

סעיף ג

הפולינום האופייני הוא $p_A(x)=(x-1)^2(x-2)$

לכן שתי האפשרויות היחידות לפולינום המינימלי הן:

$(x-1)^2(x-2)$, $(x-1)(x-2)$.

נציב את המטריצה בפולינום $(x-1)(x-2)$ ונקבל $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\neq 0$ והפולינום

המינימלי הוא $(x-1)^2(x-2)$.

תרגול 6

תת מרחבים אינוריאנטים

הגדרה

יהי $T:V\to V$ אופרטור, תת מרחב $U\subset V$ ייקרא אינווריאנטי (תחת T) אם לכל $u\in U$ מתקיים $T(u)\in U$.

דוגמא

יהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(x+y,y+z,0)$.
המרחב הוקטורי $U=\{(a,b,0)|a,b\in\mathbb{R}\}$ הוא אינווריאנטי (תחת T) מכיוון ש
$T(a,b,0)=(a+b,b,0)\in U$.

טענה

יהי $T:V\to V$ אופרטור, $U\subset V$ תת מרחב אינווריאנטי (תחת T), ו E בסיס של U. אזי
$T|_U:U\to U$ אופרטור וניתן להציג אותו כמטריצה $[T|_U]_E$.

דוגמא

נתבונן בדוגמא הקודמת $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י $T(x,y,z)=(x+y,y+z,0)$.
$U=\{(a,b,0)|a,b\in\mathbb{R}\}$ והבסיס הוא $E=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ כעת נציג את המטריצה $[T|_U]_E$.

$$T|_U(1,0,0)=(1,0,0)=1\cdot(1,0,0)+0\cdot(0,1,0)$$
$$T|_U(0,1,0)=(1,1,0)=1\cdot(1,0,0)+1\cdot(0,1,0)$$

ולכן המטריצה המתאימה היא $[T|_U]_E=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

הערה

עבור אופרטור $T:V\to V$ אם E קבוצה בת"ל כך ש $SpanE$ תת מרחב אינווריאנטי אז ניתן לקבל את המטריצה $[T|_{SpanE}]_E$.

דוגמא

יהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(x+y,x+y,z)$.
הקבוצה $E=\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ בת"ל כך ש $SpanE$ אינווריאנטי תחת T.
כעת נציג את המטריצה $[T|_{SpanE}]_E$:

$$\begin{aligned}T|_{SpanE}(1,1,0)&=(2,2,0)=2\cdot(1,1,0)+0\cdot(0,0,1)\\ T|_{SpanE}(0,0,1)&=(0,0,1)=0\cdot(1,1,0)+1\cdot(0,0,1)\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad [T|_{SpanE}]_E=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

תרגיל

יהי V מרחב וקטורי, $T:V\to V$ העתקה ליניארית, W מרחב T אינווריאנטי.
הוכח: $p_{T|_w}(\lambda)|p_T(\lambda)$.

פתרון

אם $V=W$ אז $p_{T|_w}(\lambda)=p_T(\lambda)$ ו $p_{T|_w}(\lambda)|p_T(\lambda)$.
נניח ש $V\neq W$.
נסמן $\{w_1,w_2,...,w_k\}$ בסיס של W.
נשלים את הבסיס של W לבסיס B של V עם וקטורים $\{v_1,v_2,...,v_{n-k}\}$.
נתבונן במטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B.

לכל $1 \le i \le k$ מתקיים $T(w_i) \in W$, לכן קיימים $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, .., \alpha_k^{(i)}$ יחידים כך ש $T(w_i) = \alpha_1^{(i)} w_1 + \alpha_2^{(i)} w_2 + ... + \alpha_k^{(i)} w_k$.

בנוסף W תת מרחב של V ו $\{w_1, w_2, ..., w_k, v_1, ..., v_{n-k}\}$ בסיס של V ולכן ההצגה היחידה של $T(w_i)$ כצירוף ליניארי של איברי הבסיס הנ"ל היא

$T(w_i) = \alpha_1^{(i)} w_1 + \alpha_2^{(i)} w_2 + ... + \alpha_k^{(i)} w_k + 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_{n-k}$.

מטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B כלומר $[T]_B^B$ היא

$$\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \cdots & a_1^{(k)} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & * & \\ a_k^{(1)} & \cdots & a_k^{(k)} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1}^{(k+1)} & & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^{(k+1)} & \cdots & a_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

הפולינום האופייני ייראה כך:

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_1^{(1)} & \cdots & -a_1^{(k)} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & * & \\ -a_k^{(1)} & \cdots & \lambda - a_k^{(k)} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - a_{k+1}^{(k+1)} & & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -a_n^{(k+1)} & \cdots & \lambda - a_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

מחישוב דטרמיננטה של מטריצת בלוקים נקבל

$$det \begin{pmatrix} \lambda - a_1^{(1)} & \cdots & -a_1^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_k^{(1)} & \cdots & \lambda - a_k^{(k)} \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} \lambda - a_{k+1}^{(k+1)} & & \\ \vdots & \ddots & \\ -a_n^{(k+1)} & \cdots & \lambda - a_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

נשים לב שהפולינום האופייני של $T|_W$ הוא

$$det \begin{pmatrix} \lambda - a_1^{(1)} & \cdots & -a_1^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_k^{(1)} & \cdots & \lambda - a_k^{(k)} \end{pmatrix}$$

והוכחנו את הדרוש.

<u>למה</u>

יהי $T:V\to V$ אופרטור.

1. יהי $V=U_1\oplus U_2\oplus\ldots\oplus U_k$ סכום ישר של מרחבים אינווריאנטים, ולכל $i=1,\ldots,k$, יהי B_i בסיס של U_i. נסמן $B=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_k$. אזי

$$[T]_B=\begin{pmatrix} [T]_{B_1} & O & \cdots & O \\ O & [T]_{B_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & [T]_{B_k} \end{pmatrix}.$$

2. מצד שני, אם

$$[T]_B=\begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_k \end{pmatrix}.$$

מטריצה אלכסונית-בלוקים, אז יש חלוקה של B לאיחוד זר, $B=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_k$, כך שלכל $i=1,\ldots,k$, התת מרחב $U_i=SpanB_i$ הוא אינווריאנטי, ו $[T]_{B_i}=A_i$.

<u>דוגמא</u>

בעזרת החלק השני של הלמה נבנה דוגמא לחלק הראשון של הלמה

ניקח את B להיות הבסיס הסטנדרטי ונתבונן במטריצה

$$[T]_B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

נגדיר את ההעתקה הליניארית $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ ע"י

$$T(x,y,z,t,w)=(x+z,x+2y-z,x+2y-2z,t+2w,3t+4w)$$

כעת $B_1=\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0)\},B_2=\{(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$

נשים לב שהתת מרחבים $U_1=SpanB_1,U_2=SpanB_2$ הם אינווריאנטים ואז כדי לקבל חזרה את $[T]_B$

נבנה את $[T]_{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$. נקבל ש $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ ו $[T]_{B_2}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

נקבל את מטריצה הבלוקים הדרושה $\begin{pmatrix} [T]_{B_1} & 0 \\ 0 & [T]_{B_2} \end{pmatrix}$.

נשים לב שאם נשנה את סדר האיברים בבסיס נקבל את מטריצת הבלוקים $\begin{pmatrix} [T]_{B_{\backslash 2}} & 0 \\ 0 & [T]_{B_1} \end{pmatrix}$.

מרחבים עצמיים מוכללים

הגדרה

יהי V מרחב וקטורי כך ש $\dim V = n$ לכל ערך עצמי λ של T, נגדיר את המרחב העצמי המוכלל $K_\lambda = K_\lambda(T) = \ker(T-\lambda I)^n = \left\{v \in V : (T-\lambda I)^n v = \vec{0}\right\}$.

דוגמא

עבור המטריצה $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ נקבל שהפולינום האופייני הוא $(\lambda+2)^2(\lambda-4)$ ולכן הערכים העצמיים הם $4,-2$.

נמצא את המרחב העצמי המוכלל עבור הערך העצמי $\lambda = 4$.

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 48 & -12 & 12 \\ 48 & -12 & 12 \\ 36 & -36 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -324 & 108 & -108 \\ -324 & 108 & -108 \\ -216 & 216 & -216 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מרחב האפס הוא $Span\{(0,1,1)\}$.

באותו אופן ניתן למצוא את המרחב העצמי המוכלל עבור הערך העצמי $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -216 & 216 & 0 \\ -216 & 216 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מרחב האפס הוא $Span\{(1,1,0),(1,1,1)\}$.

הגדרה

קבוצה מהצורה $E = \left\{T^{m-1}v,\dots,T^2v,Tv,v\right\}$ כאשר $T^{m-1}v \neq 0$ ו $T^m v = 0$, תיקרא מסלול מאורך m.

הערה

הוכחתם בהרצאה שכל מסלול היא קבוצה בת"ל.

דוגמא

ניקח מהדוגמא הקודמת את המטריצה

$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ והווקטור $(1,1,1)$ ואז $E = \{(-1,-1,0),(1,1,1)\}$ הוא המסלול המתאים.

טענה

$K_\lambda = \left\{v \in V : \exists k, (T-\lambda I)^k v = 0\right\}$ ובנוסף K_λ אינוריאנטי תחת T.

משפט

נניח שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים מעל השדה. יהיו $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ הערכים העצמיים השונים של T. אזי $V = K_{\lambda_1} \oplus K_{\lambda_2} \oplus \dots K_{\lambda_k}$ פירוק של V לסכום ישר של תת מרחבים אינוריאנטים.

דוגמא

עבור המטריצה מהדוגמא הקודמת $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ הפולינום האופייני מתפרק לגורמים ליניאריים

$(\lambda+2)^2(\lambda-4)$.

ראינו ש $K_4 = Span\{(0,1,1)\}$ ו $K_{-2} = Span\{(-1,-1,0),(1,1,1)\}$.

נראה ש $K_4 = Span\{(0,1,1)\}$ תת מרחב אינוריאנטי

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in K_4$$ ואז $[T]_{K_4} = (4)$.

נראה ש $K_{-2} = Span\{(-1,-1,0),(1,1,1)\}$ תת מרחב אינוריאנטי

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in K_{-2}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in K_{-2}$$

ואז $[T]_{K_{-2}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

ואז אם $B = \{(-1,-1,0),(1,1,1),(0,1,1)\}$ אז $[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

תרגול 7

משפט ג'ורדן

1. תהיי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים ליניאריים. אזי A דומה למטריצה אלכסונית-בלוקים שכל בלוקיה הם בלוקי ג'ורדן $J_m(\lambda)$:

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{m_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

($\lambda_1,...,\lambda_k$ אינם בהכרח שונים).

2. יהי $T:V\to V$ אופרטור כך שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים. אזי T ניתן להצגה כמטריצה כנ"ל.

הערה

הצגות המטריצה או האופרטור בעזרת בלוקי ג'ורדן כנ"ל הן יחידות, עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

מציאת בסיס מג'רדן עבור מטריצה נילפוטנטית

מטרה: מציאת בסיס מהצורה $B=E_1\cup E_2\cup ...E_t$ כאשר כל E_i הוא מסלול.

אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה נילפוטנטית שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים ליניאריים אז $p_A(x)=x^n$ ו $m_A(x)=x^k$ כאשר $k\le n$.

נשים לב ש $colA^{k-1}\subseteq V_0$.

נבנה בסיס ל V_0 על ידי התחלה מבסיס לתת-המרחב הקטן ביותר ברשימה הבאה, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור, וכו', עד להשלמה לבסיס למרחב כולו

$ColA^{k-1}\subseteq V_0\cap ColA^{k-2}\subseteq V_0\cap ColA^{k-3}\subseteq ...\subseteq V_0\cap ColA\subseteq V_0$.

הערה

כדי למצוא בסיס ל $V_0\cap ColA^m$ אפשר:

א. לחשב את A^m ולקחת בסיס $u_1,u_2,....,u_r$ של מרחב העמודות שלה.

ב. עבור משתנים $x_1,x_2,...,x_r$ נפתור את מערכת המשוואות $A(x_1u_1+x_2u_2+....+x_ru_r)=0$ וניקח בסיס למרחב הפתרונות.

כל וקטור בבסיס זה הוא מהצורה A^jv כך ש $A^{j+1}v=0$. משלימים כל וקטור כזה למסלול השלם $A^jv,A^{j-1}v,...,Av,v$. אוסף כל המסלולים הוא הבסיס המג'רדן, וכל מסלול תורם בלוק ג'ורדן אחד, שגודלו שווה לאורך המסלול.

המטריצה המג'רדנת P היא המטריצה שעמודותיה הן אברי כל המסלולים שסללנו לעיל, מסודרים כך שכותבים את סוף המסלול, וממשיכים ימינה עד להתחלת המסלול. אז $P^{-1}AP$ תהייה צורת ג'ורדן של A.

דוגמא 1

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, A^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

A מטריצה נילפוטנטית מסדר 3 ומתקיים $p_A(x)=x^3, m_A(x)=x^3$.

$ColA^2\subseteq V_0\cap ColA\subseteq V_0$.

נמצא בסיס ל V_0 על ידי התחלה מבסיס לתת-המרחב הקטן ביותר ברשימה הנ"ל, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור, וכו' עד להשלמה לבסיס למרחב כולו.

$$ColA^2=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

נשים לב ש $V_0=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ וקיבלנו ש $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל V_0 ולכן סיימנו את התהליך.

יש למצוא וקטור v כך ש $A^2v=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (קיים כזה וקטור מכיוון ש $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\in ColA^2$)

נשים לב ש $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

המסלול הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\left\{A^2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

נשים את הבסיס שקיבלנו בעמודות מטריצה: $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ ניתן לראות שמתקיים

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

<u>הערה</u>

מכיוון ש $p_A(x)=x^3, m_A(x)=x^3$ יכולנו לדעת מראש שיש מסלול אחד מאורך 3 מבלי לבדוק שאכן מתקיים $V_0=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ ושצורת ג'ורדן של A היא $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

דוגמא 2

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

מטריצה נילפוטנטית מסדר 2 ומתקיים $p_A(x)=x^3, m_A(x)=x^2$.

$ColA\subseteq V_0$.

נמצא בסיס ל V_0 על ידי התחלה מבסיס לתת-המרחב הקטן ביותר ברשימה הנ"ל, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור, וכו' עד להשלמה לבסיס למרחב כולו.

$$ColA=Span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נשים לב ש $V_0=Span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ וקיבלנו ש $B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל V_0 ולכן סיימנו את התהליך.

יש למצוא וקטור v כך ש $Av=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (קיים כזה וקטור מכיוון ש $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\in ColA$). נשים לב ש

$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. קיבלנו שני מסלולים $E_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},E_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\Leftarrow B=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

נשים את הבסיס שקיבלנו בעמודות מטריצה: $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ ניתן לראות שמתקיים

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

הערה

מכיוון ש $p_A(x)=x^3, m_A(x)=x^2$ יכולנו לדעת מראש שיש שני מסלולים אחד מאורך 2 ואחד מאורך 1 ושצורת ג'ורדן של A היא $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

דוגמא 3

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&-1\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&-1&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

הפולינום האופייני הוא $P_A(x)=x^5$ והפולינום המינימלי הוא $m_A(x)=x^3$ (כלומר מטריצה נילפוטנטית מסדר 3).

$ColA^2\subseteq V_0\cap ColA\subseteq V_0$.

נמצא בסיס ל V_0 על ידי התחלה מבסיס לתת-המרחב הקטן ביותר ברשימה הנ"ל, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור, וכו' עד להשלמה לבסיס למרחב כולו.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&1&-1\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&-1&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&1&-1\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&-1&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\-1&0&-1&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$ColA^2=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $ColA^2$.

נשלים לבסיס של $V_0\cap ColA$

נמצא בסיס למרחב וקטורי:

הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $ColA$.

נפתור את המשוואה $\begin{pmatrix}0&1&0&1&-1\\0&0&0&0&1\\0&-1&0&-1&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\left(x_1\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

נקבל את מערכת המשוואות $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$ והבסיס למרחב הפתרונות הוא $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ נציב כל אחד

מאיברי הבסיס הנ"ל ב $x_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ונקבל בסיס ל $V_0 \cap ColA$.

סה"כ הבסיס של $V_0 \cap ColA$ הוא $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

נשים לב ש $V_0 = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ והבסיס של V_0 הוא $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

יש למצוא וקטור v כך ש $A^2v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (קיים כזה וקטור מכיוון ש $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in ColA^2$)

נשים לב ש $A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואז $E_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

יש למצוא וקטור v כך ש $Av = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (קיים כזה וקטור מכיוון ש $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in ColA$). נשים לב ש

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואז $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \right\}$

קיבלנו שני מסלולים $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \right\}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \right\}$.

נשים את הבסיס שקיבלנו בעמודות מטריצה: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ניתן לראות שמתקיים

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>הערה</u>

מכיוון ש $p_A(x) = x^5, m_A(x) = x^3$ יכולנו לדעת מראש שאחת משתי האפשרויות חייב להתקיים:

אפשרות 1: שלושה מסלולים: מסלול עם שלושה איברים ושני מסלולים עם איבר אחד כל מסלול.

אפשרות 2: שני מסלולים: מסלול אחד עם שלושה איברים ומסלול אחד עם שני איברים.

בתרגיל קיבלנו את אפשרות 2.

אם היינו מקבלים את אפשרות אחת אז צורת ג'ורדן הייתה $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

תרגול 8

משפט ג'ורדן

3. תהיי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים ליניאריים. אזי A דומה למטריצה אלכסונית-בלוקים שכל בלוקיה הם בלוקי ג'ורדן $J_m(\lambda)$:

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & O & \cdots & O \\ O & J_{m_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

($\lambda_1,...,\lambda_k$ אינם בהכרח שונים).

4. יהי $T:V\to V$ אופרטור כך שהפולינום האופייני של T מתפרק לגורמים ליניאריים. אזי T ניתן להצגה כמטריצה כנ"ל.

הערה

הצגות המטריצה או האופרטור בעזרת בלוקי ג'ורדן כנ"ל הן יחידות, עד כדי שינוי סדר הבלוקים.

מציאת בסיס מג'רדן עבור מטריצה עם ערך עצמי אחד

מטרה: מציאת בסיס מהצורה $B=E_1\cup E_2\cup ...E_t$ כאשר כל E_i הוא מסלול.

אם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה עם ערך עצמי אחד λ אז המטריצה $A-\lambda I\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה נילפוטנטית. אם הפולינום האופייני של $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתפרק לגורמים ליניאריים אז $p_A(x)=(x-\lambda)^n$ ו $m_A(x)=(x-\lambda)^k$ כאשר $k\le n$.

נשים לב ש $col(A-\lambda I)^{k-1}\subseteq V_\lambda$.

נבנה בסיס ל V_λ על ידי התחלה מבסיס לתת-המרחב הקטן ביותר ברשימה הבאה, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור, וכו', עד להשלמה לבסיס למרחב כולו

$$Col(A-\lambda I)^{k-1}\subseteq V_\lambda\cap Col(A-\lambda I)^{k-2}\subseteq V_\lambda\cap Col(A-\lambda I)^{k-3}\subseteq ...\subseteq V_\lambda\cap Col(A-\lambda I)\subseteq V_\lambda$$
.

הערה

כדי למצוא בסיס ל $V_\lambda\cap Col(A-\lambda I)^m$ אפשר:

א. לחשב את $(A-\lambda I)^m$ ולקחת בסיס $u_1,u_2,....,u_r$ של מרחב העמודות שלה.

ב. עבור משתנים $x_1,x_2,...,x_r$ נפתור את מערכת המשוואות $(A-\lambda I)(x_1u_1+x_2u_2+....+x_ru_r)=0$ וניקח בסיס למרחב הפתרונות.

כל וקטור בבסיס זה הוא מהצורה $(A-\lambda I)^j v$ כך ש $(A-\lambda I)^{j+1}v=0$. משלימים כל וקטור כזה למסלול השלם $(A-\lambda I)^j v,(A-\lambda I)^{j-1}v,...,(A-\lambda I)v,v$. אוסף כל המסלולים הוא הבסיס המג'רדן, וכל מסלול תורם בלוק ג'ורדן אחד, שגודלו שווה לאורך המסלול.

המטריצה המג'רדנת P היא המטריצה שעמודותיה הן אברי כל המסלולים שסללנו לעיל, מסודרים כך שכותבים את סוף המסלול, וממשיכים ימינה עד להתחלת המסלול. אז $P^{-1}AP$ תהייה צורת ג'ורדן של A.

דוגמא

$$A=\begin{pmatrix}-7&3&4&-9\\2&1&-1&2\\-6&3&5&-6\\7&-2&-3&9\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}-9&3&4&-9\\2&-1&-1&2\\-6&3&3&-6\\7&-2&-3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9&3&4&-9\\2&-1&-1&2\\-6&3&3&-6\\7&-2&-3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$A-2I$ מטריצה נילפוטנטית מסדר 2 ומתקיים $p_A(x)=(x-2)^4, m_A(x)=(x-2)^2$.

$Col(A-2I)\subseteq V_2$.

נמצא בסיס ל V_2 על ידי התחלה מבסיס לתת-המרחב הקטן ביותר ברשימה הנ"ל, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור, וכו' עד להשלמה לבסיס למרחב כולו.

$$Col(A-2I)=Span\left\{\begin{pmatrix}-9\\2\\-6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

נשים לב ש $V_2=Span\left\{\begin{pmatrix}-9\\2\\-6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$ וקיבלנו ש $B=\left\{\begin{pmatrix}-9\\2\\-6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל V_2 ולכן סיימנו את התהליך.

יש למצוא וקטור v כך ש $(A-2I)v=\begin{pmatrix}-9\\2\\-6\\7\end{pmatrix}$ (קיים כזה וקטור מכיוון ש $\begin{pmatrix}-9\\2\\-6\\7\end{pmatrix}\in Col(A-2I)$)

נשים לב ש $(A-2I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\2\\-6\\7\end{pmatrix}$.

המסלול הוא $\left\{\begin{pmatrix}-9\\2\\-6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{(A-2I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

יש למצוא וקטור v כך ש $(A-2I)v=\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}$ (קיים כזה וקטור מכיוון ש $\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}\in Col(A-2I)$)

נשים לב ש $\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\-2\end{pmatrix}=(A-2I)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

המסלול הוא $\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{(A-2I)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

נשים את הבסיס שקיבלנו בעמודות מטריצה: $P=\begin{pmatrix}-9&1&3&0\\2&0&-1&1\\-6&0&3&0\\7&0&-2&0\end{pmatrix}$ ניתן לראות שמתקיים

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

<u>הערה</u>

מכיוון ש $p_A(x)=(x-2)^4, m_A(x)=(x-2)^2$ יכולנו לדעת מראש שיש שתי אפשרויות.

אפשרות 1: יש שני מסלולים מאורך 2 כפי שהייה בדוגמא.

אפשרות 2: יש מסלול אחד מאורך 2 ושני מסלולים מאורך 1.

במקרה זה צורת ג'ורדן של A היא $\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

<u>מציאת בסיס מג'רדן עבור מטריצה עם יותר מערך עצמי אחד</u>

מטרה: מציאת בסיס מהצורה $B=E_1\cup E_2\cup ...E_t$ כאשר כל E_i הוא מסלול.

אם λ ערך עצמי של המטריצה $A\in F^{n\times n}$ והפולינום האופייני של $A\in F^{n\times n}$ מתפרק לגורמים ליניאריים אז $p_A(x)=(x-\lambda)^n f(x)$ ו $m_A(x)=(x-\lambda)^k g(x)$ כאשר $k\le n$.

נשים לב שהפעם לא מתקיים $col(A-\lambda I)^{k-1}\subseteq V_\lambda$.

נבנה בסיס ל V_λ על ידי התחלה מבסיס לתת-המרחב הקטן ביותר ברשימה הבאה, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור, וכו', עד להשלמה לבסיס למרחב כולו

$$V_\lambda \cap Col(A-\lambda I)^{k-1} \subseteq V_\lambda \cap Col(A-\lambda I)^{k-2} \subseteq V_\lambda \cap Col(A-\lambda I)^{k-3} \subseteq ... \subseteq V_\lambda \cap Col(A-\lambda I) \subseteq V_\lambda$$
.

הערה

כדי למצוא בסיס ל $V_\lambda \cap Col(A-\lambda I)^m$ אפשר:

א. לחשב את $(A-\lambda I)^m$ ולקחת בסיס $u_1,u_2,....,u_r$ של מרחב העמודות שלה.

ב. עבור משתנים $x_1,x_2,...,x_r$ נפתור את מערכת המשוואות $(A-\lambda I)(x_1u_1+x_2u_2+....+x_ru_r)=0$ וניקח בסיס למרחב הפתרונות.

כל וקטור בבסיס זה הוא מהצורה $(A-\lambda I)^j v$ כך ש $(A-\lambda I)^{j+1}v=0$. משלימים כל וקטור כזה למסלול השלם $(A-\lambda I)^j v,(A-\lambda I)^{j-1}v,...,(A-\lambda I)v,v$.

חוזרים על התהליך עבור כל אחד מהערכים העצמיים.

אוסף כל המסלולים המתקבלים נותן את הבסיס המג'רדן, וכל מסלול תורם בלוק ג'ורדן אחד, שגודלו שווה לאורך המסלול.

המטריצה המג'רדנת P היא המטריצה שעמודותיה הן אברי כל המסלולים שסללנו לעיל, מסודרים כך שכותבים את סוף המסלול, וממשיכים ימינה עד להתחלת המסלול. אז $P^{-1}AP$ תהייה צורת ג'ורדן של A.

דוגמא

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$p_A(x)=(x+2)^2(x-4), m_A(x)=(x+2)^2(x-4)$.

נמצא מסלול עבור הערך העצמי -2.

נשים לב שהפעם לא מתקיים $Col(A+2I)\subseteq V_{-2}$.

נמצא בסיס ל V_{-2} על ידי התחלה מבסיס לתת-המרחב הקטן ביותר ברשימה הנ"ל, השלמתו לבסיס למרחב הבא בתור, וכו' עד להשלמה לבסיס למרחב כולו.

$V_{-2}\cap Col(A+2I)\subseteq V_{-2}$.

נמצא בסיס ל V_{-2}

$$A+2I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \underset{6R_1-R_3\to R_3}{\overset{7R_1-R_2\to R_2}{\approx}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הבסיס של V_{-2} הוא $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ נשים לב ש $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\in Col(A+2I)$ ולכן הבסיס של $V_{-2}\cap Col(A+2I)$ הוא

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ יש למצוא וקטור v כך ש $(A+2I)v=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (קיים כזה וקטור מכיוון ש $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\in Col(A+2I)$)

נשים לב ש $(A+2I)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. המסלול הוא $\left\{(A+2I)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

מכיוון שהפולינום המינימלי הוא $m_A(x)=(x+2)^2(x-4)$ מספיק למצוא בסיס ל V_4 ולקבל מסלול באורך 1.

$$A-4I=\begin{pmatrix}-7&1&-1\\-7&1&-1\\-6&6&-6\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-7&1&-1\\-1&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-7&1&-1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

הבסיס של V_4 הוא $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ והמסלול הוא $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

נשים את הבסיס שקיבלנו בעמודות מטריצה: $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ ניתן לראות שמתקיים

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

<u>הערה</u>

מכיוון ש $p_A(x)=(x+2)^2(x-4),m_A(x)=(x+2)^2(x-4)$ יכולנו לדעת מראש שעבור ערך עצמי 2- יש מסלול מאורך 2 ועבור ערך עצמי 4 יש מסלול מאורך 1 ואז בהכרח צורת ג'ורדן של A היא

$$\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

<u>משפט</u>

יהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי אשר הפולינומים האופייני והמינימלי שלו הם, בהתאמה,

$$p(t)=(t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(1-\lambda_r)^{n_r}\ ,\ m(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(1-\lambda_r)^{m_r}.$$

כאשר λ_i הם סקלרים שונים. אזי ל T יש הצגה כמטריצת בלוקים אלכסונית J אשר איברי האלכסון שלה הם מהצורה $J_{ij}=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&0&.&0\\0&\lambda_i&1&.&.\\.&.&.&.&.\\.&.&.&.&1\\0&0&.&.&\lambda_i\end{pmatrix}$ עבור כל λ_i הבלוקים המתאימים J_{ij} הם בעלי התכונות הבאות:

א. יש לפחות J_{ij} אחד מסדר m_i; כל ה J_{ij} האחרים $\le m_{ij}$.

ב. סכום הסדרים של ה J_{ij} הוא n_i.

ג. מספרים של ה J_{ij} שווה לריבוב הגאומטרי של λ_i.

ד. מספר ה- J_{ij} מכל סדר אפשרי נקבע באופן יחיד ע"י T.

המטריצה J המופיעה במשפט שלעיל נקראת הצורה הקנונית של ג'ורדן של האופרטור T.
בלוק אלכסוני J_{ij} נקרא בלוק ג'ורדן השייך לערך עצמי λ_i.

<u>דוגמא</u>

נניח שהפולינום האופייני והפולינום המינימאלי של אופרטור T הם, בהתאמה,

$$m(t)=(t-2)^2(t-3)^2\,,\,p(t)=(t-2)^4(t-3)^3$$

אזי הצורה הקנונית של ג'ורדן של T היא אחת מהמטריצות הבאות:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix} or \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & 0 & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

המטריצה הימנית מתאימה למקרה שבו המימד של המרחב העצמי של הערך העצמי 2 הוא 2 והשמאלית 3.

<u>תרגיל ממבחן 2012 מועד א</u>

מצא את צורת ג'ורדן של המטריצה
$$A=\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & . & 1 \\ 0 & n & n-1 & . & 2 \\ . & 0 & n & . & 3 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & n \end{pmatrix}$$

<u>פתרון</u>

נחשב תחילה את הפולינום האופייני

$$f_A(x)=|xI-A|=\begin{vmatrix} x-n & 1-n & 2-n & . & -1 \\ 0 & x-n & 1-n & . & -2 \\ . & 0 & x-n & . & -3 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & x-n \end{vmatrix}=(x-n)^n$$

n הוא הערך עצמי היחיד מכיוון שהוא השורש היחידי של הפולינום האופייני.

נבדור מהו הריהוי הגיאומטרי של הערך העצמי שקיבלנו ז"א נחשב את המימד של מרחב האפס של המטריצה

$$A-nI=\begin{pmatrix} 0 & n-1 & n-2 & . & 1 \\ 0 & 0 & n-1 & . & 2 \\ . & 0 & 0 & . & 3 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

מספר המשתנים החופשיים הוא 1 ולכן הריבוי הגיאומטרי הוא 1.

מספר בלוקי גורדן הוא 1 ולכן המטריצה המבוקשת היא

$$J=\begin{pmatrix} n & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & n & . & & . \\ . & & . & . & . \\ . & & & . & 1 \\ 0 & & & & n \end{pmatrix}$$

תרגול 9

מכפלה פנימית

מרחבי מכפלה פנימית ממשית

הגדרה

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

פונקציה $\langle , \rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ נקראת מכפלה פנימית (ממשית) על V אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. אי שליליות: $\langle v,v\rangle\ge 0$ ו $\langle v,v\rangle=0 \Leftrightarrow v=0$.
2. סימטריות: $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$.
3. ליניאריות במשתנה הראשון: $\langle \alpha v+\beta u,w\rangle=\alpha\langle v,w\rangle+\beta\langle u,w\rangle$.

דוגמא

$V=\mathbb{R}^2$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ נגדיר פונקציה $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ באופן הבא:

עבור שני וקטורים $u=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ ב $\mathbb{R}^2$ $\langle u,v\rangle=u^tv$.

ז"א $\langle u,v\rangle=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2$.

למשל: $u=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ $\langle u,v\rangle=-5$.

הגדרה – מכפלה פנימית סטנדרטית

ניתן להכליל את הדוגמא הקודמת לפונקציה $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

עבור שני וקטורים u,v ב $\mathbb{R}^n$ $\langle u,v\rangle=u^tv$.

המכפלה הפנימית הנ"ל נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תרגיל

הראה שהפונקציה $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת באופן הבא:

עבור שני וקטורים $u=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ ב $\mathbb{R}^2$ $\langle u,v\rangle=x_1^2y_1+x_2^2y_2$ אינה מכפלה פנימית.

פתרון

יש להראות שעבור שהי וקטורים אחת מהתכונות בהגדרת מכפלה פנימית לא מתקיימות.

למשל עבור $u=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. $\begin{matrix}\langle u,v\rangle=1^2\cdot 2+(-2)^2\cdot(-1)=-2\\ \langle v,u\rangle=2^2\cdot 1+(-1)^2\cdot(-2)=2\end{matrix}$ תכונת הסימטריות לא מתקיימת.

הערה

מהליניאריות במשתנה הראשון ומהסימטריות ניתן להראות ליניאריות במשתנה השני.

אם $\langle , \rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ מכפלה פנימית אז עבור $\alpha,\beta\in\mathbb{R};u,v,w\in V$ מתקיים

$\langle w,\alpha v+\beta u\rangle=\langle \alpha v+\beta u,w\rangle=\alpha\langle v,w\rangle+\beta\langle u,w\rangle=\alpha\langle w,v\rangle+\beta\langle w,u\rangle$.

תרגיל

תהי $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$. הוכח: $\langle v,u\rangle=v^tAu$ הוא מכפלה פנימית מעל R.

פתרון

נבדוק שמתקיימים שלושת התנאים:

1. ליניאריות ברכיב הראשון:

$$\langle \alpha v_1 + v_2, u\rangle = \left(\alpha v_1^t + v_2^t\right)Au = \alpha v_1^t Au + v_2^t Au = \alpha\langle v_1, u\rangle + \langle v_2, u\rangle.$$

2. סימטריות: נשים לב שהמטריצה סימטרית ומתקיים $A^t = A$ ולפי הגדרת מכפלה פנימית $\langle v,u\rangle$ סקלר ולכן מתקיים $\langle v,u\rangle^t = \langle v,u\rangle$.

$$\langle v,u\rangle = \langle v,u\rangle^t = \left(v^t Au\right)^t = u^t A^t \left(v^t\right)^t = u^t Av = \langle u,v\rangle$$

3. אי שליליות:

$$\langle v,v\rangle = \left(v_1, v_2\right)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \left(v_1, v_2\right)\begin{pmatrix}v_1+v_2\\ v_1+2v_2\end{pmatrix} = v_1^2 + v_1v_2 + v_2v_1 + 2v_2^2 =$$

$$= \left(v_1+v_2\right)^2 + v_2^2 \geq 0$$

מתקיים שוויון כאשר $v_1 + v_2 = v_2 = 0 \Leftarrow v_1 = v_2 = 0 \Leftarrow v = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

<u>תרגיל ממבחן תשע"ג מועד א</u>

יהי $V = \mathbb{R}_2\left[x\right]$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2. נגדיר מכפלה פנימית על V על ידי

$$\left\langle a_1 + b_1x + c_1x^2, a_2 + b_2x + c_2x^2\right\rangle = 4a_1a_2 + 2b_1b_2 + c_1c_2$$

לכל $a_1 + b_1x + c_1x^2, a_2 + b_2x + c_2x^2 \in V$.

הוכח שזו אכן מכפלה פנימית על V.

<u>פתרון</u>

סימטריות נובע מהקומוטטיביות בשדה וליניאריות מהפילוג בשדה.

נבדוק אי שליליות: $\left\langle a+bx+cx^2, a+bx+cx^2\right\rangle = 4a^2 + 2b^2 + c^2 \geq 0$ נקבל שוויון רק כאשר $a = b = c$

<u>הגדרה</u>

מרחב וקטורי V עם מכפלה פנימית נקרא מרחב מכפלה פנימית.

<u>מרחבי מכפלה פנימית מרוכבים</u>

<u>הגדרה</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

פונקציה $\langle,\rangle : V\times V \to \mathbb{C}$ נקראת מכפלה פנימית על V אם היא מקיימת את התנאים הבאים:

1. אי שליליות: $\langle v,v\rangle \geq 0$ ו $v = 0 \Leftrightarrow \langle v,v\rangle = 0$.
2. הרמטיות: $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$.
3. ליניאריות במשתנה הראשון: $\langle \alpha v + \beta u, w\rangle = \alpha\langle v,w\rangle + \beta\langle u,w\rangle$.

<u>הערה לגבי ליניאריות במשתנה השני</u>

בגלל השוני בתכונה 2 נקבל במקרה זה

$$\langle w, \alpha v + \beta u\rangle = \overline{\langle \alpha v + \beta u, w\rangle} = \overline{\alpha\langle v,w\rangle} + \overline{\beta\langle u,w\rangle} = \overline{\alpha}\langle w,v\rangle + \overline{\beta}\langle w,u\rangle.$$

ז"א "כאילו ליניאריות" במשתנה השני.

<u>תרגיל</u>

$V = \mathbb{C}^2$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ נגדיר פונקציה $\langle,\rangle : \mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ באופן הבא:

עבור שני וקטורים $u=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ ב $\mathbb{C}^2$ $\langle u,v\rangle = u^t v$.

הראה שפונקציה זו אינה מכפלה פנימית.

פתרון

נראה שתכונה 1 בהגדרת מכפלה פנימית לא מתקיימת. נתבונן בווקטור $v=\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}$.

$$\langle v,v\rangle = v^t v = \begin{pmatrix}i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix} = i^2+i^2=-2.$$

לפי תכונה 1 במרחב מכפלה פנימית $\langle v,v\rangle \geq 0$.

הגדרה – מכפלה פנימית סטנדרטית על המרוכבים

$V=\mathbb{C}^n$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ נגדיר פונקציה $\langle , \rangle : \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ באופן הבא:

עבור שני וקטורים u,v ב $\mathbb{C}^n$ $\langle u,v\rangle = u^t \bar{v}$.

תרגיל ממבחן תשע"ב מועד א

יהי $V=\mathbb{C}^{n\times n}$ מרחב המטריצות המרוכבות. נגדיר מכפלה פנימית על V בצורה הבאה:

$\langle A,B\rangle := tr\left(AB^*\right)$ כאשר $B^*=\overline{B^t}$ לכל $A,B\in V$.

הוכח שזו אכן מכפלה פנימית.

פתרון

תזכורת: $tr(A)=tr\left(A^t\right), tr(A+B)=trA+trB, tr(AB)=tr(BA), tr(\alpha A)=\alpha tr(A)$.

נבדוק שמתקיימות שלושת התכונות:

1. ליניאריות ברכיב הראשון:

$$\langle \alpha A_1+A_2,B\rangle = tr\left((\alpha A_1+A_2)B^*\right)=tr\left(\alpha A_1B^*+A_2B^*\right)=\alpha tr\left(A_1B^*\right)+tr\left(A_2B^*\right)=\alpha\langle A_1,B\rangle+\langle A_2,B\rangle$$

2. הרמטיות:

$$\langle A,B\rangle = tr\left(AB^*\right)=tr\left(A\overline{B^t}\right)=\overline{tr\left(\overline{A\overline{B^t}}\right)}=\overline{tr\left(\overline{A}B^t\right)}=\overline{tr\left(\left(\overline{A}B^t\right)^t\right)}=\overline{tr\left(B\overline{A^t}\right)}=\overline{\langle B,A\rangle}$$

3. אי שליליות:

$$\langle A,A\rangle = tr\left(AA^*\right)=\sum_{i=1}^n R_i(A)C_i\left(A^*\right)=\sum_{i=1}^n R_i(A)C_i\left(\overline{A^t}\right)=\sum_{i=1}^n R_i(A)\overline{\left(R_i(A)\right)^t}$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\overline{a_{ij}}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left|a_{ij}\right|^2\geq 0$$

השוויון מתקיים רק אם $a_{ij}=0$ לכל i,j.

תרגיל

תהא $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ הוכח שהטענות הבאות שקולות:

1. $\langle v,u\rangle = v^t Au$ היא מכפלה פנימית.
2. $|A|>0, a_{11}>0, a_{22}>0$, A מטריצה סימטרית.

פתרון

$2 \Leftarrow 1$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$. נניח ש $\langle v,u\rangle = v^t Au$ היא מכפלה פנימית.

מתקיים $\langle v,u\rangle = \langle u,v\rangle$ לכל v,u ובפרט עבור $u=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$$\langle v,u\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix} = a_{12}$$
$$\langle u,v\rangle = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} = a_{21}$$

$\Leftarrow$ $a_{12}=a_{21}$ והמטריצה סימטרית.

ניתן לרשום $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$.

$$\langle v,v\rangle = v^t Au = \begin{pmatrix}v_1 & v_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1 & v_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}v_1+a_{12}v_2\\a_{12}v_1+a_{22}v_2\end{pmatrix} = a_{11}v_1^2+a_{12}v_1v_2+a_{12}v_1v_2+a_{22}v_2^2$$

לכל v_1,v_2 צריך להתקיים $a_{11}v_1^2+2a_{12}v_1v_2+a_{22}v_2^2\ge 0$.

אם $v_2=0$ אז $\langle v,v\rangle = a_{11}v_1^2$ ולכן $a_{11}>0$.

אם $v_1=0$ אז $\langle v,v\rangle = a_{22}v_2^2$ ולכן $a_{22}>0$.

אם $v_2=1$ אז צריך להתקיים $a_{11}v_1^2+2a_{12}v_1+a_{22}\ge 0$ לכל v_1

מכיוון ש $a_{11}>0$ האי שוויון $a_{11}v_1^2+2a_{12}v_1+a_{22}\ge 0$ נכון לכל v_1 רק אם

$4a_{12}^2-4a_{11}a_{22}<0 \Rightarrow a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0 \Rightarrow |A|>0$.

$1 \Leftarrow 2$

נתון ש $|A|>0, a_{11}>0, a_{22}>0$ ו A מטריצה סימטרית. צריך להוכיח ש $\langle v,u\rangle = v^t Au$ מכפלה פנימית.

נתון ש A סימטרית ולכן ניתן לרשום $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$

אי שליליות:

$$\langle v,v\rangle = v^t A u = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{12}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix} = a_{11}v_1^2 + a_{12}v_1v_2 + a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2$$ צר

יך להוכיח ש $a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2 \ge 0$ לכל v_1, v_2

נתון ש $a_{11} > 0, a_{22} > 0$, ולכן מספיק להוכיח ש $4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} < 0$ מכיוון ש $|A| > 0$ נקבל את

הדרוש.

שוויון יתקיים רק כאשר $v_1 = v_2 = 0$.

סימטריות:

$$\langle v,u\rangle = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \end{pmatrix} = a_{11}u_1v_1 + a_{12}u_2v_1 + a_{12}u_1v_2 + a_{22}u_2v_2$$

$$\langle u,v\rangle = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{12}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix} = a_{11}v_1u_1 + a_{12}v_2u_1 + a_{12}v_1u_2 + a_{22}v_2u_2$$

וקיבלנו שוויון.

ליניאריות:

מתקיים מתכונות כפל מטריצות.

<u>תרגיל</u>

יהיו $u,v,w \in \mathbb{C}^n$ נתון ש $\langle u,w\rangle = 2i+1, \langle v,w\rangle = 3$.

חשב את $\langle iw, -iu+2iv\rangle$.

<u>פתרון</u>

מהליניאריות במשתנה הראשון נקבל $\langle iw, -iu+2iv\rangle = i\langle w, -iu+2iv\rangle$.

מהסימטריות נקבל $i\langle w, -iu+2iv\rangle = i\cdot\overline{\langle -iu+2iv, w\rangle}$.

מהליניאריות במשתנה הראשון נקבל

$$i\langle w, -iu+2iv\rangle = i\cdot\overline{\langle -iu+2iv, w\rangle} = i\cdot\left(\overline{-i}\,\overline{\langle u,w\rangle} + \overline{2i}\cdot\overline{\langle v,w\rangle}\right) = i\cdot i\cdot(1-2i) + 2\cdot 3 = 5+2i$$.

תרגול 10

נורמה

הפונקציה $\| \ \|: V \to \mathbb{R}$ תקרא נורמה אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. אי שליליות: לכל $v \in V$ $\|v\| \geq 0$. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
2. לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$.
3. אי שוויון המשולש: לכל $u, v \in V$ מתקיים $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

הנורמה המושרית

עבור מכפלה פנימית $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ הנורמה המושרית מוגדרת ע"י $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ונאמר שהוא האורך של הווקטור v.

דוגמא

אם $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ אז $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

הגדרה

אם $\|u\| = 1$ אז u נקרא וקטור יחידה ואומרים שהוא מנורמל.

הערה

ניתן להכפיל כל וקטור $v \in V$ שונה מאפס בהופכי של אורכו, וכך לקבל את וקטור היחידה $\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} v$ שהיא כפולה חיובית של v. תהליך זה נקרא נרמול של v.

דוגמא

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|v\| = 3 \Rightarrow \hat{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

הגדרה

קבוצה S של וקטורים במרחב מכפלה פנימית V נקראת אורתוגונאלית אם כל זוג וקטורים ב S הוא אורתוגונאלי. כלומר: לכל שני וקטורים שונים $v, u \in S$ מתקיים $\langle v, u \rangle = 0$.

דוגמא

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

הגדרה

קבוצה S של וקטורים במרחב מכפלה פנימית V נקראת אורתונורמלית אם:

א. S אורתוגונאלית.

ב. לכל וקטור ב S יש אורך יחידה.

הערה

נרמול של קבוצה אורתוגונאלית הוא הכפלת כל וקטור בקבוצה בהופכי של אורכו כדי לשנות את הקבוצה לקבוצה אורתונורמלית של וקטורים.

דוגמאות לקבוצות אורתונורמליות

1. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

2. $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$

תרגיל

נתונה קבוצה $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ מוכלת ב $\mathbb{R}^3$. $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

א. מצא וקטור v_3 אם נתון שהקבוצה S אורתוגונאלית.

ב. נרמל את הקבוצה S.

פתרון

א. נסמן $v_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. $\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=0$ $\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0,$ מספיק פתרון אחד של מערכת המשוואות ההומוגנית $\begin{cases}x+y+z=0\\-x+y=0\end{cases}$ כדי לקבל את הווקטור המתאים. אחד מהאפשרויות ל v_3 הוא $v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

ב. הקבוצה לאחר נרמול היא $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\right\}$.

הגדרה

יהי B בסיס של מרחב מכפלה פנימית V. B נקרא בסיס אורתונורמלי אם הוא קבוצה אורתונורמלית.

דוגמא

הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$.

מדוע הקבוצה היא בסיס?

מספר האיברים בקבוצה שווה למימד של המרחב וקטורי $\mathbb{R}^3$.

ראיתם בהרצאה שקבוצה אורתונורמלית היא בת"ל.
מהמשפט שלישי חינם נקבל שהקבוצה הנ"ל גם פורשת, ולכן בסיס.

הגדרה – מטריצה אוניטרית

מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ נקראת אוניטרית אם $A^* = A^{-1}$.

דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

הערה

נשים לב ש $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = A^T A$.

תרגיל

תהי A אוניטרית. הוכיחו כי כל הערכים העצמיים של A הם מאורך 1.

פתרון

יהי z ערך עצמי של A אזי קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש $Av = zv$.

יש להוכיח ש $z\bar{z} = 1$.

$$z\bar{z}\langle v, v\rangle = \langle zv, zv\rangle = \langle Av, Av\rangle = (Av)^t\,\overline{Av} = v^t A^t\,\overline{Av} = v^t\left(A^t \bar{A}\right)\bar{v}.$$

מכיוון ש $A^t \bar{A}$ מטריצה ממשית נקבל ש $A^t \bar{A} = \overline{A^t \bar{A}} = \overline{A^t} A = A^* A$.

מכיוון ש A אוניטרית נקבל ש $A^* A = I$.

לכן $z\bar{z}\langle v, v\rangle = v^t \bar{v} = \langle v, v\rangle$.

מהאי שליליות במכפלה פנימית ומכיוון ש $v \neq 0$ נקבל ש $\langle v, v\rangle \neq 0$.

$z\bar{z}\langle v, v\rangle = \langle v, v\rangle \Leftarrow z\bar{z} = 1$ כדרוש.

הגדרה

יהי מרחב מכפלה פנימית V ותהי קבוצת וקטורים $S \subseteq V$ אזי הקבוצה $S^{\perp} := \{v \in V \mid \forall s \in S : \langle v, s\rangle = 0\}$ הינה מרחב וקטורי.

אנו קוראים ל $S^{\perp}$ המרחב הניצב ל S.

דוגמא

המרחב הוקטורי $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. $S = \{(1,0)\}$ אז $S^{\perp} = \{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

תרגיל

הוכח או הפרך: $S = \left(S^{\perp}\right)^{\perp}$.

פתרון

דוגמא נגדית: בדוגמא הקודמת $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \left\{(t,0) \middle| t\in\mathbb{R}\right\} \neq S$.

תרגיל

יהי V מרחב מכפל פנימית הוכח שאם $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ אז $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.

פתרון

יהי $v \in S_2^{\perp}$ צריך להוכיח ש $v \in S_1^{\perp}$ ז"א צריך להוכיח שלכל $w \in S_1$ מתקיים $\langle v,w\rangle = 0$.

יהי $w \in S_1$ נתון ש $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ ולכן $w \in S_2$ ומכיוון ש $v \in S_2^{\perp}$ נקבל ש $\langle v,w\rangle = 0$ ז"א $v \in S_1^{\perp}$.

הגדרה

V מרחב מכפלה פנימית, $W \subseteq V$ תת מרחב.

המשלים האורתוגונאלי של W מסומן ב $W^{\perp}$ ומכיל את כל הווקטורים האורתוגונאליים ל W.

כלומר: $W^{\perp} = \left\{v\in V \middle| \langle v,w\rangle = 0, \forall w\in W\right\}$.

הערה

נניח ש W תת מרחב של מרחב וקטורי V. v אורתוגונאלי לכל וקטור בבסיס B של W אם ורק אם $v \in W^{\perp}$.

הסבר עבור מרחב וקטורי ממימד 2

נניח ש $B = \{w_1, w_2\}$ אם $w \in W$ אז קיימים סקלרים α, β כך ש $w = \alpha w_1 + \beta w_2$.

$\langle w,v\rangle = \langle \alpha w_1 + \beta w_2, v\rangle = \alpha\langle w_1,v\rangle + \beta\langle w_2,v\rangle = 0$.

באותו אופן ניתן להכליל את ההסבר למרחב וקטורים עם מימד גדול יותר.

תרגיל

$V = \mathbb{R}^4$. נתון $W = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$. מהו $W^{\perp}$?

פתרון

מכיוון שהקבוצה $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס של W מספיק למצוא את כל הוקטורים $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$ ב $\mathbb{R}^4$ המאונכים לכל וקטור בבסיס.

נמצא מיהם הוקטורים שמאונכים לבסיס של W.

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow x-y+t=0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow y+2z+t=0$$

יש לפתור את מערכת המשוואות ההומוגנית $\begin{cases} x-y+t=0 \\ y+2z+t=0 \end{cases}$ קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית מהווה תת מרחב.

נמצא את הבסיס לתת מרחב.

המטריצה המתאימה היא $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ והמשתנים החופשיים הם: z,t.

עבור $z=0,t=1$ נקבל $x=-2, y=-1$. עבור $z=1,t=0$ נקבל $x=y=-2$.

נשים לב ש $W^{\perp}$ הוא תת מרחב והבסיס הוא $B=\left\{ \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$.

<u>תרגיל</u>

נניח ש U,W תת מרחבים. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

ב. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

<u>פתרון</u>

א. לא נכון, נניח ש $U=\{0\}, W=\mathbb{R}^2$.
$$\begin{aligned}(U+W)^{\perp} &= \left(\mathbb{R}^2\right)^{\perp} = \{0\} \\ U^{\perp}+W^{\perp} &= \left(\{0\}\right)^{\perp} + \left(\mathbb{R}^2\right)^{\perp} = \mathbb{R}^2 + \{0\} = \mathbb{R}^2\end{aligned}.$$

ב. הוכחה. נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית. נניח ש $v \in (U+W)^{\perp}$.

יהי $u \in U$ מכיוון ש $U \subseteq U+W$ נקבל ש $u \in U+W$. מכיוון ש $v \in (U+W)^{\perp}$ נקבל ש $\langle v,u \rangle = 0 \Leftarrow v \in U^{\perp}$.

יהי $w \in W$ מכיוון ש $W \subseteq U+W$ נקבל ש $w \in U+W$. מכיוון ש $v \in (U+W)^{\perp}$ נקבל ש $\langle v,w \rangle = 0 \Leftarrow v \in W^{\perp}$. סה"כ קיבלנו ש $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$ כדרוש.

יהי $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$. נניח ש $x \in U+W$ ז"א $x=u+w$ כאשר $u \in U$, $w \in W$.
מכיוון ש $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$ אז $\langle v,u \rangle = 0$, $\langle v,w \rangle = 0$.

מליניאריות המכפלה הפנימית נקבל ש $\langle v,x \rangle = \langle v,u+w \rangle = \langle v,u \rangle + \langle v,w \rangle = 0+0=0$.

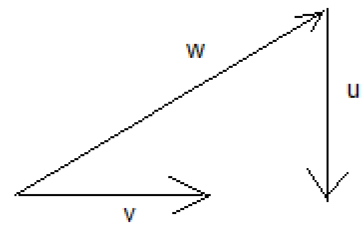
נשים לב ש $\langle v,u \rangle = 0$, $\langle v,w \rangle = 0$ מספרים ממשיים, ולכן המכפלה הפנימית ליניארית גם עבור הרכיב השני.

סה"כ קיבלנו ש $v \in (U+W)^{\perp}$.

היטל

בהינתן שני וקטורים w,v נרצה למצוא את ההיטל של w על v.

המחשה



קיים α כך ש αv הוא ההיטל של w על v. נרצה לחשב את α.

מחיבור וקטורים נקבל $u+\alpha v = w \Leftarrow u = w-\alpha v$.

מהגדרת היטל נקבל ש $u \perp v \Leftarrow \langle u,v\rangle = 0$.

$u = w-\alpha v \Leftarrow \langle u,v\rangle = \langle w-\alpha v, v\rangle \Leftarrow \langle w-\alpha v, v\rangle = 0$.

מהליניאריות ברכיב הראשון נקבל $0 = \langle w-\alpha v, v\rangle = \langle w,v\rangle - \alpha\langle v,v\rangle \Leftarrow \alpha = \dfrac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$.

מסקנה

בהנחה ש v,w הם בת"ל, הם פורשים מרחב וקטורי ממימד 2 של מרחב מכפלה פנימית V.

אם v,w אינם אורתוגונליים ניתן לקחת במקומם את $\{v,u\}$ כלומר: $\left\{v, w-\dfrac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v\right\}$.

וקטורים אלו הם אורתוגונליים, וכך קיבלנו בסיס אורתוגונלי חלופי.

על מנת לקבל בסיס אורתונורמלי יש גם לנרמל כל אחד מהווקטורים בבסיס.

דוגמא

$V=\mathbb{R}^3$ $W = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\}$. נמצא בסיס אורתונורמלי. נסמן $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

נמצא וקטור u שמאונך ל v_1 כך שהקבוצה $\{v_1,u\}$ פורשת את W.

נשתמש במסקנה הקודמת ונקבל ש $u = v_2 - \dfrac{\langle v_2,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1$.

$$u = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{7}\\ \frac{3}{7}\\ -\frac{6}{7}\end{pmatrix}$$

קיבלנו $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{12}{7}\\ \frac{3}{7}\\ -\frac{6}{7}\end{pmatrix}\right\}$.

כדי לקבל בסיס אורתונורמלי ננרמל כל אחד מהוקטורים בבסיס שקיבלנו.

תרגול 11

הגדרה

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו W תת מרחב של V ו $v \in V$ וקטור. ההגדרות הבאות למושג היטל v על המרחב W שקולות:

א. $B=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ בסיס אורתוגונלי לתת המרחב W, אז ההיטל הינו $\pi_W(v)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v,w_i\rangle}{\langle w_i,w_i\rangle}w_i$.

ב. ההיטל הוא הווקטור $\pi_W(v)\in W$ המקיים $v-\pi_W(v)\in W^{\perp}$.

דוגמא

יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה סטנדרטית ותהיי A מטריצה שעמודותיה בת"ל.

עבור וקטור $v\in V$ נרצה למצוא את ההיטל $\pi_{C(A)}(v)$. $v-\pi_{C(A)}(v)\in(C(A))^{\perp}$.

לכל עמודה של A $C_i(A)$ מתקיים $(C_i(A))^t\overline{(v-\pi_{C(A)}(v))}=0$ נפעיל צמוד על שני האגפים ונקבל

$\overline{(C_i(A))^t}(v-\pi_{C(A)}(v))=0$ מכיוון שהשוויון נכון לכל עמודה נקבל ש

$\overline{A^t}(v-\pi_{C(A)}(v))=0 \Leftarrow A^*(v-\pi_{C(A)}(v))=0$.

מכיוון ש $\pi_{C(A)}(v)\in C(A)$ קיים $\vec{x}$ כך ש $A\vec{x}=\pi_{C(A)}(v)$.

$A^*(v-A\vec{x})=0 \Leftarrow (A^*A)\vec{x}=A^*v$ מכיוון שהעמודות של המטריצה A בת"ל ניתן להוכיח ש A^*A מטריצה הפיכה וקיים פתרון יחיד למשוואה $(A^*A)\vec{x}=A^*v$. נציב את $\vec{x}$ במשוואה $A\vec{x}=\pi_{C(A)}(v)$ ונקבל את ההיטל.

למשל:

$v=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\2&3\end{pmatrix}$ מהמשוואה $(A^*A)\vec{x}=A^*v$ נקבל

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}6&5\\5&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\16\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}6&5\\0&-35\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-46\end{pmatrix}$$

$x=\frac{4}{7}, y=\frac{46}{35}$. עבור $\bar{x}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{46}{35}\end{pmatrix}$ וההיטל הוא $\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{46}{35}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{26}{35}\\\frac{178}{35}\end{pmatrix}$

משפט פיתגורס

עבור בסיס אורתונורמלי $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ וווקטור $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ מתקיים $\|v\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2$.

תרגיל

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי W תת מרחב. הוכיחו כי לכל $v \in V$ $\|v-\pi_W(v)\| \le \|v\|$.

פתרון

נשתמש בהגדרה הראשונה של היטל:

$B=\{w_1,w_2,...,w_n\}$ בסיס אורתוגונלי לתת המרחב W, אז ההיטל הינו $\pi_W(v)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v,w_i\rangle}{\langle w_i,w_i\rangle}w_i$.

ניקח בסיס אורתונורמלי $B=\{w_1,w_2,...,w_k\}$ למרחב W ונשלים אותו לבסיס אורתונורמלי $\{w_1,w_2,...,w_k,w_{k+1},...,w_n\}$ למרחב V.

מכיוון ש $v \in V$ נקבל ש $v=\pi_v(v)$ ולפי הגדרת ההיטל נקבל:

$$\pi_W(v)=\sum_{i=1}^{k}\langle v,w_i\rangle w_i,\ v=\pi_V(v)=\sum_{i=1}^{n}\langle v,w_i\rangle w_i \Leftarrow v-\pi_W(v)=\sum_{i=k+1}^{n}\langle v,w_i\rangle w_i.$$

ממשפט פיתגורס נקבל

$$\|v-\pi_W(v)\|^2=\left\|\sum_{i=k+1}^{n}\langle v,w_i\rangle w_i\right\|^2=\sum_{i=k+1}^{n}\left|\langle v,w_i\rangle\right|^2\le\sum_{i=1}^{n}\left|\langle v,w_i\rangle\right|^2=\|v\|^2.$$

תרגיל

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ממימד n ויהי $U\subseteq V$ תת מרחב ממימד k.

הוכיחו כי לכל בסיס אורתונורמלי $\{v_1,v_2,..,v_n\}$ למרחב V מתקיים $\sum_{i=1}^{n}\|\pi_U(v_i)\|^2=k$.

פתרון

ניקח בסיס אורתונורמלי כלשהו $\{u_1,u_2,..,u_k\}$ למרחב U.

$$\sum_{i=1}^{n}\|\pi_U(v_i)\|^2=\sum_{i=1}^{n}\langle\pi_U(v_i),\pi_U(v_i)\rangle.$$

על פי הגדרת ההיטל $\pi_U(v_i)=\sum_{j=1}^{k}\langle v_i,u_j\rangle u_j$ ואז

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\pi_U(v_i),\pi_U(v_i)\rangle=\sum_{i=1}^{n}\left\langle\sum_{j=1}^{k}\langle v_i,u_j\rangle u_j,\sum_{j=1}^{k}\langle v_i,u_j\rangle u_j\right\rangle$$

מהליניאריות ברכיב הראשון, כמו ליניאריות ברכיב השני ומכיוון ש $\langle u_j,u_j\rangle=1$ לכל j

(כי $\{u_1,u_2,..,u_k\}$ בסיס אורתונורמלי) נקבל

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle\sum_{j=1}^{k}\langle v_i,u_j\rangle u_j,\sum_{j=1}^{k}\langle v_i,u_j\rangle u_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\langle v_i,u_j\rangle\overline{\langle v_i,u_j\rangle}\right)=\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\langle u_j,v_i\rangle}\langle u_j,v_i\rangle\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left\langle\sum_{i=1}^{n}\langle u_j,v_i\rangle v_i,\sum_{i=1}^{n}\langle u_j,v_i\rangle v_i\right\rangle=\sum_{j=1}^{k}\|\pi_V(u_j)\|^2$$

מכיוון ש $u_j\in U$ נקבל ש $u_j=\pi_V(u_j)$ מכיוון שהבסיס $\{u_1,u_2,..,u_k\}$ אורתונורמלי נקבל שלכל j

$\|u_j\|^2=\|\pi_V(u_j)\|^2=1$ וסה"כ נקבל ש $\sum_{j=1}^{k}\|\pi_V(u_j)\|^2=k$.

תרגיל

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $U,W \subseteq V$ תת מרחבים כך ש $\dim U = m, \dim W = k$.

א. הוכיחו כי $\langle v,u\rangle = \langle \pi_U(v),u\rangle$ לכל $u \in U, v \in V$.

ב. נגדיר אופרטור $P_U : U \to U$ ע"י $P_U(u) = \pi_U(\pi_W(u))$

הוכיחו כי לכל שני וקטורים $u_1,u_2 \in U$ מתקיים $\langle P_U(u_1),u_2\rangle = \langle u_1, P_U(u_2)\rangle$.

פתרון

א. כפי שראינו בהגדרה השנייה $(v-\pi_U(v)) \in U^{\perp}$ ולכן $\langle v-\pi_U(v),u\rangle = 0$

נשתמש בליניאריות ברכיב הראשון ונעביר אגף על מנת לקבל $\langle v,u\rangle = \langle \pi_U(v),u\rangle$.

ב. על פי הגדרת האופרטור מתקיים $\langle P_U(u_1),u_2\rangle = \langle \pi_U(\pi_W(u_1)),u_2\rangle$.

כיוון ש $u_2 \in U$ לפי סעיף א מתקיים: $\langle \pi_U(\pi_W(u_1)),u_2\rangle = \langle \pi_W(u_1),u_2\rangle$.

מכיוון ש $\pi_W(u_1) \in W$ נקבל $\langle \pi_W(u_1),u_2\rangle = \langle \pi_W(u_1),\pi_W(u_2)\rangle = \langle u_1,\pi_W(u_2)\rangle$

שוב כיוון ש $u_1 \in U$ מתקיים $\langle u_1,\pi_W(u_2)\rangle = \langle u_1,\pi_U(\pi_W(u_2))\rangle = \langle u_1,P_U(u_2)\rangle$

מטרה

בהינתן מרחב וקטורי V נרצה למצוא בסיס אורתונורמלי למרחב וקטורי.

דוגמא 1

עבור המרחב וקטורי $\mathbb{R}^3$ הבסיס הסטנדרטי הוא הבסיס האורתונורמלי ז"א $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

לא תמיד הבסיס הסטנדרטי או קבוצה חלקית לבסיס הסטנדרטי תפרוש את המרחב וקטורי.

דוגמא 2

המרחב וקטורי $W = Sp\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \right\}$ הוא ממימד 2. קבוצה חלקית של B מהדוגמא הקודמת אינה פורשת את W. נרצה למצוא בסיס אורתונורמלי למרחב וקטורי כמו בדוגמא.

היטלים

תהליך גרם - שמידט

V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$. $W \subseteq V$ תת מרחב של V.

$B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ הוא בסיס כלשהו ל W.

מטרה: לקבל בסיס אורתונורמלי ל W.

שלב א אורתוגונליזציה

מטרה לקבל בסיס אורתוגונלי $B^* = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$.

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\cdot u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\cdot u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}\cdot u_2$$

.

.

.

$$u_k = v_k - \frac{\langle v_k, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}\cdot u_1 - \frac{\langle v_k, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}\cdot u_2 - \ldots - \frac{\langle v_k, u_{k-1}\rangle}{\langle u_{k-1}, u_{k-1}\rangle}\cdot u_{k-1}$$

<u>שלב ב</u>

נרמול כל אחד מהוקטורים בבסיס שקיבלנו בשלב א.

<u>דוגמא</u>

$W = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\5\\7\end{pmatrix}\right\}$. הווקטורים הנ"ל בת"ל, ולכן מהווים בסיס ל W.

נמצא בסיס אורתונורמלי ל W.

$$u_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix}4\\1\\5\\7\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}4\\1\\5\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}4\\1\\5\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\\7\end{pmatrix}$$

קיבלנו $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\5\\7\end{pmatrix}\right\}$. ע"י נרמול נקבל את הבסיס $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\5/\sqrt{74}\\7/\sqrt{74}\end{pmatrix}\right\}$.

<u>תרגיל</u>

מצא בעזרת ההגדרה הראשונה של היטל את ההיטל של $v=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ על $U=span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$.

<u>פתרון</u>

נמצא תחילה בסיס אורתוגונלי בעזרת תהליך גראם שמידט

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

הבסיס האורתוגונלי על פי תהליך גראם שמידט הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}\right\}$.

נחשב את ההיטל על פי ההגדרה $B=\{w_1,w_2,...,w_n\}$ בסיס אורתוגונלי לתת המרחב W, אז ההיטל הינו $\pi_W(v)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v,w_i\rangle}{\langle w_i,w_i\rangle}w_i$.

$$\pi_U(v)=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{26}{35}\\\frac{178}{35}\end{pmatrix}$$

כפי שיצא לנו מקודם.

<u>תרגיל ממבחן תשע"ג מועד</u>

נתבונן ב $\mathbb{R}^3$ כמרחב מכפלה פנימית, עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

יהי $W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+2z=0\right\}$ תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

תהיי $\pi_W:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ פונקציית ההטלה האורתוגונלית על תת המרחב W.

א. מצא את ההצגה של π_W ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

ב. מצא את הפולינום האופייני של π_W.

ג. הוכח שהאופרטור π_W ניתן ללכסון.

<u>פתרון</u>

א. נמצא תחילה בסיס אורתוגונלי לתת מרחב W.

נמצא בסיס לקבוצת הפתרון של המשוואה $x+2y+2z=0$ $B=\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

נמצא בסיס אורתוגונלי בעזרת תהליך גרם שמידט

$$u_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

הבסיס האורותוגונלי הוא $B=\left\{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\right\}$

נשתמש בהגדרה הראשונה להיטל ונקבל $\pi_W(v)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v,w_i\rangle}{\langle w_i,w_i\rangle}w_i$

$$\pi_W\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{9}\\-\frac{2}{9}\\-\frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

$$\pi_W\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9}\\\frac{5}{9}\\-\frac{4}{9}\end{pmatrix}$$

$$\pi_W\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9}\\-\frac{4}{9}\\\frac{5}{9}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{8}{9}&-\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}\\-\frac{2}{9}&\frac{5}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{2}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{5}{9}\end{pmatrix}$$

סעיפים ב+ג קשורים לנושאים קודמים ניתן לעשות את שאר הסעיפים במידה ויאפשר הזמן.

תרגול 12

ההעתקה הצמודה

פונקציונאלי ליניארי ומשפט ההצגה של ריס

הגדרה

יהי V מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$. המרחב הדואלי של V שיסומן ב V^* הוא המרחב הוקטורי שאיבריו הם הפונקציות הליניאריות $V \to \mathbb{F}$. החיבור והכפל בסקלר מוגדרים בצורה הטריויאלית.

איבר ב V^* נקרא פונקציונאלי ליניארי.

משפט ההצגה של ריס

לכל פונקציונאלי ליניארי φ יש וקטור יחיד u כך ש $\varphi(v)=\langle v,u\rangle$ לכל $v\in V$.

תרגיל ממבחן תשע"א מועד א

א. הגדר על $\mathbb{C}_n[x]$ מכפלה פנימית, כך שהבסיס $\{1,x,x^2,...,x^n\}$ יהיה אורתונורמלי.

ב. נגדיר $\phi\in(\mathbb{C}_n[x])^*$ על ידי: לכל $p(x)\in\mathbb{C}_n[x]$, $\varphi(p(x))=p'(1)$.
כלומר: גוזרים את $p(x)$ ואח"כ מציבים 1. (אין צורך להוכיח כי φ פונקציונאלי ליניארי).
לגבי המכפלה הפנימית שהגדרת בסעיף קודם, מצא $q(x)\in\mathbb{C}_n[x]$ כך שלכל $p(x)\in\mathbb{C}_n[x]$, מתקיים $\varphi(p(x))=\langle p(x),q(x)\rangle$.

פתרון

א. עבור $p_1(x),p_2(x)\in\mathbb{C}_n[x]$ כך ש $p_1(x)=\sum_{i=0}^n\alpha_i x^i$, $p_2(x)=\sum_{i=0}^n\beta_i x^i$ נגדיר את המכפלה הפנימית $\langle p_1(x),p_2(x)\rangle=\sum_{i=0}^n\alpha_i\overline{\beta_i}$.
נראה שהבסיס $\{1,x,x^2,...,x^n\}$ הוא אורתונורמלי.
לפי הגדרת המכפלה הפנימית נקבל ש $\langle x^n,x^m\rangle$ שווה ל 1 אם $n=m$ ושווה ל 0 אם $n\neq m$ ולכן הבסיס $\{1,x,x^2,...,x^n\}$ אורתונורמלי.

ב. ניקח את הפולינום $q(x)=\sum_{i=1}^n ix^i$ ואז עבור $p(x)=\sum_{i=0}^n\alpha_i x^i$ נקבל מצד אחד $p'(x)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\cdot ix^{i-1}$ ואז $\varphi(p(x))=p'(1)=\sum_{i=1}^n(\alpha_i\cdot i)$ ומצד שני $\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{i=1}^n(\alpha_i\cdot i)$. סה"כ קיבלנו ש $\varphi(p(x))=\langle p(x),q(x)\rangle$ כדרוש.

ההעתקה הצמודה

משפט

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית בין מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה.

א. קיימת העתקה יחידה $T^*:W\to V$ כך שלכל $v\in V, w\in W$ מתקיים: $\langle T(v),w\rangle=\langle v,T^*(w)\rangle$.

ב. ההעתקה $T^*:W\to V$ היא העתקה ליניארית.

ג. בבסיס אורתונומלי כלשהו $\{w_1,w_2,...,w_n\}$ של W, $T^*:W\to V$ נתונה ע"י הנוסחה $T^*(v)=\sum_{i=1}^n\overline{\langle T(w_i),v\rangle}w_i$.

הגדרה

$T^*:W\to V$ כנ"ל נקראת ההעתקה הצמודה של $T:V\to W$.

תרגיל

נתון מרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נתונה העתקה ליניארית

$T(x,y)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ מצא את ההעתקה הצמודה T^*.

פתרון

נבחר ב $\mathbb{R}^2$ את הבסיס האורתונורמלי הסטנדרטי $\{e_1,e_2\}$ ונשתמש בנוסחה עבור T^*.

נקבל ש $T^*(v)=\langle T(e_1),v\rangle e_1+\langle T(e_2),v\rangle e_2$. על פי הגדרת T מתקיים

$T(e_1)=(1,1),T(e_2)=(-1,-1)$ ולכן לכל $v=(x,y)$ נקבל $\langle T(e_1),v\rangle=x+y,\langle T(e_2),v\rangle=-x-y$

ז"א $T^*(v)=(x+y)e_1+(-x-y)e_2=(x+y,-x-y)$ סה"כ קיבלנו ש $T^*(x,y)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

משפט

לכל בסיס אורתונורמלי B של המרחב V מתקיים: $[T^*]_B=[T]_B^*$.

תרגיל

תהיי $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ המוגדרת ע"י $T(z_1,z_2,z_3)=(iz_1,iz_1+(1+i)z_2,iz_1+(1+i)z_2+(i+2)z_3)$

מצא את ההעתקה הצמודה.

פתרון

יהי $B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ בסיס אורתונורמלי.

$[T]_B=\begin{pmatrix}i&0&0\\i&1+i&0\\i&1+i&2+i\end{pmatrix}\Rightarrow[T]_B^*=\begin{pmatrix}-i&-i&-i\\0&1-i&1-i\\0&0&2-i\end{pmatrix}$ ואז ההעתקה הצמודה היא

$T^*(z_1,z_2,z_3)=(-iz_1-iz_2-iz_3,(1-i)z_2+(1-i)z_3,(2-i)z_3)$.

משפט

תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית בין מרחבי מכפלה פנימית. אז מתקיים:

א. $(T^*)^*=T$.

ב. $(S+T)^*=S^*+T^*$.

ג. $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$.

ד. $(ST)^*=T^*S^*$.

ה. אם T הפיכה אז גם T^* הפיכה ומתקיים $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

הגדרה

אופרטור ליניארי $T:V\to V$ נקרא נורמלי אם $TT^*=T^*T$.

דוגמא

העתקה $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+2iy\\2x+(4+2i)y\end{pmatrix}$.

תרגיל תש"ע מועד ב

הוכח כי אם T אופרטור נורמלי ו α,β מספרים מרוכבים כך ש $|\alpha|=|\beta|=1$, אז גם האופרטור $\alpha T+\beta T^*$ הוא נורמלי.

<u>פתרון</u>

מספיק להוכיח ש $\left(\alpha T+\beta T^*\right)^*\left(\alpha T+\beta T^*\right)=\left(\alpha T+\beta T^*\right)\left(\alpha T+\beta T^*\right)^*$

בעזרת המשפט הקודם נקבל ש $\left(\alpha T+\beta T^*\right)^*=(\alpha T)^*+\left(\beta T^*\right)^*=\bar{\alpha}T^*+\bar{\beta}T$

מאגף שמאל נקבל

$$\left(\alpha T+\beta T^*\right)^*\left(\alpha T+\beta T^*\right)=\left(\bar{\alpha}T^*+\bar{\beta}T\right)\left(\alpha T+\beta T^*\right)=\bar{\alpha}\alpha T^*T+\bar{\alpha}\beta T^*T^*+\bar{\beta}\alpha TT+\bar{\beta}\beta TT^*$$

מאגף ימין נקבל

$$\left(\alpha T+\beta T^*\right)\left(\alpha T+\beta T^*\right)^*=\left(\alpha T+\beta T^*\right)\left(\bar{\alpha}T^*+\bar{\beta}T\right)=\alpha\bar{\alpha}TT^*+\alpha\bar{\beta}TT+\beta\bar{\alpha}T^*T^*+\beta\bar{\beta}T^*T$$

מכיוון ש T אופרטור נורמלי מתקיים $TT^*=T^*T$ ואז שני הביטויים שקיבלנו שווים.

<u>הגדרה</u>

העתקה ליניארית $T:V\to V$ נקראת צמודה לעצמה אם $T^*=T$ ונקראת אוניטרית אם $T^*=T^{-1}$.

<u>דוגמא</u>

ההעתקה $T(v)=\alpha v$ תהייה צמודה לעצמה אם ורק אם α ממשי.

<u>תרגיל</u>

יהי V מרחב מכפלה פנימית, $T:V\to V$ צמוד לעצמו, U אופרטור אוניטרי. הוכח כי UT נורמלי אם ורק אם U ו T^2 מתחלפים.

<u>פתרון</u>

$$(UT)(UT)^*=(UT)\left(T^*U^*\right)=UT^2U^*$$

$$(UT)^*(UT)=\left(T^*U^*\right)(UT)=T^2$$

אם UT נורמלי אז מתקיים $UT^2=T^2U \Leftrightarrow UT^2U^*U=T^2U \Leftrightarrow UT^2U^*=T^2$.

אם U ו T^2 מתחלפים אז מתקיים $UT^2U^*=T^2UU^*=T^2$.

<u>תרגיל</u>

נתבונן בשלושת התנאים הבאים על העתקה ליניארית $T:V\to V$:

א. T אוניטרית.

ב. T צמודה לעצמה.

ג. $T^2=I$.

הוכח כי קיום כל שני תנאים מאלה שרשומים לעיל גורר את קיום התנאי השלישי.

<u>פתרון</u>

1. אם T אוניטרית וצמודה לעצמה נקבל ש $T^2=TT^*=I$.
2. אם T צמודה לעצמה ו $T^2=I$ אז $TT^*=T^2=I$.
3. אם T אוניטרית ו $T^2=I$ אז $T^2=I\wedge T^*T=I\Rightarrow T^*T^2=T\Rightarrow T^*=T$.

<u>תרגיל</u>

הוכח כי אם $T:V\to V$ העתקה צמודה לעצמה כך ש $T^2=T$ אז T היא הטלה אורתוגונאלית על תת מרחב $U=\operatorname{Im}T$.

<u>פתרון</u>

על פי משפט פירוק הניצב $V=U\oplus U^\perp$. כלומר עבור $v\in V$ כלשהו קיימים $u_1\in U,u_2\in U^\perp$ כך ש $v=u_1+u_2$. על מנת להראות ש T היא הטלה אורתוגונאלית על תת מרחב $U=\operatorname{Im}T$ יש להראות ש $T(v)=u_1$.

יהי $u\in V$ כלשהו, אז מתקיים $(Tv,u)=(Tu_1+Tu_2,u)=(Tu_1,u)+(Tu_2,u)=(Tu_1,u)+(u_2,Tu)$

מכיוון ש $u_2\in U^\perp$ נקבל ש $\langle u_2,Tu\rangle=0$ לכל $u\in V$ ולכן לכל $u\in V$ נקבל ש $(Tv,u)=(Tu_1,u)$

ז"א $T(v)=T(u_1)$ מכיוון ש $u_1\in U=\operatorname{Im}T$ קיים $w_1\in V$ כך ש $T(w_1)=u_1$.

סה"כ נקבל ש $T(v)=T(u_1)=T(T(w_1))=T^2(w_1)=T(w_1)=u_1$.

<u>תזכורת</u>

מטריצה $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ נקראת אורתוגונאלית אם כל העמודות שלה הן אורתונורמליות. כלומר: $PP^T=P^TP=I$.

<u>הגדרה</u>

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ניתנת ללכסון אורתוגונאלי אם קיימת מטריצה $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ אורתוגונאלית ומטריצה אלכסונית $D\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $P^{-1}AP=D$.

<u>משפט</u>

$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית אם ורק אם A ניתנת ללכסון אורתוגונאלי.

<u>דוגמא</u>

מצאו לכסון אורתוגונאלי של A כאשר $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$.

נמצא תחילה את הערכים העצמיים של A.

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$. נחשב את הדטרמיננטה בעזרת דירוג ונקבל שהפולינום האופייני הוא $P_A(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$.

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור $\lambda=5$.

יש למצוא בסיס למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}4&-2&-2\\0&6&-6\\0&-6&6\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}4&-2&-2\\0&6&-6\\0&0&0\end{pmatrix}$.

הבסיס הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

נמצא את הבסיס עבור $\lambda=-1$.

$\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}$ ואז הבסיס הוא $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

הוקטורים העצמיים בבסיס $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ לא מאונכים.

נרצה למצוא שני וקטורים u_1,u_2 אורתוגונאלים כך ש $span\{u_1,u_2\}=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

נבצע את תהליך גראם שמידט.

$$u_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},u_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

לאחר נרמול נקבל מטריצה אורתוגונאלית

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

תרגול 13

המרחב הדואלי

הגדרה

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. העתקה ליניארית $\varphi : V \to f$ נקראת פונקציונל.

הגדרה

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. אוסף כל הפונקציונלים מ V נקרא מרחב דואלי של V ומסומן ב V^*.

דוגמאות

1. $tr : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ הוא פונקציונל.
2. $\varphi : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}$ המוגדרת על ידי $\phi(x,y,z) = x+y+z$ היא פונקציונל ליניארי.
3. $\det : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ אינה פונקציונל, כי דטרמיננטה אינה העתקה ליניארית.

משפט - הגדרה

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ בסיס של V, אזי $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$,
$\varphi_i(v_j) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ בסיס של V^* והוא נקרא הבסיס הדואלי.

תרגיל

יהי $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1,0,3),(0,2,2),(0,2,1)\}$ בסיס. מצא את הבסיס הדואלי.

פתרון

נשים לב ש $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(-3x - \frac{1}{2}y + z\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (3x+y-z)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נמצא את האיבר הראשון בבסיס הדואלי, כלומר יש למצוא פונקציונל המקיים:

$$\varphi_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1, \varphi_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0, \varphi_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\varphi_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \Leftarrow \varphi_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\varphi_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(-3x - \frac{1}{2}y + z\right)\varphi_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (3x+y-z)\varphi_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x$$

נמצא את האיבר השני בבסיס הדואלי, כלומר יש למצוא פונקציונל המקיים:

$$\varphi_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0, \varphi_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1, \varphi_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\varphi_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3x - \frac{1}{2}y + z \Leftarrow \varphi_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\varphi_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(-3x - \frac{1}{2}y + z\right)\varphi_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (3x+y-z)\varphi_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3x - \frac{1}{2}y + z$$

נמצא את האיבר השלישי בבסיס הדואלי, כלומר יש למצוא פונקציונל המקיים:

$$\varphi_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0, \varphi_3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0, \varphi_3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\varphi_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=3x+y-z\Leftarrow\varphi_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\varphi_3\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\left(-3x-\frac{1}{2}y+z\right)\varphi_3\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+(3x+y-z)\varphi_3\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=3x+y-z$$

<u>משפט</u>

לכל $v\in V$ נגדיר פונקציה $\hat{v}:V^*\to\mathbb{F}$ על ידי $\hat{v}(\varphi)=\varphi(v)$.

כל בסיס של V^* הוא דואלי לאיזשהו בסיס של V: $C=\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ בסיס של V^*, ו

$C^*:=\left\{\hat{v}_1,\hat{v}_2,...,\hat{v}_n\right\}$ הבסיס של V^{**} הדואלי ל C, מתקיים $C=\{v_1,v_2,...,v_n\}^*$.

<u>תרגיל</u>

יהי $V=\mathbb{R}_1[t]$. (פולינומים לינאריים). נגדיר פונקציונלים לינאריים

$\varphi_1(f(t))=\int_0^1 f(t)dt,\int_0^2\varphi_2(f(t))dt$. כלומר: $\varphi_1,\varphi_2\in V^*$. מצא את הבסיס הדואלי ל $\{\varphi_1,\varphi_2\}$.

<u>פתרון</u>

נחשב את הפונקציות כאשר $f(t)=a+bt$.

$\varphi_1(f(t))=\int_0^1(a+bt)dt=a+\frac{b}{2},\int_0^2\varphi_2(f(t))dt=2a+2b$.

נמצא בסיס $B=\{f_1,f_2\}$ כך ש $B^*=\{\varphi_1,\varphi_2\}$ ונשתמש במשפט הקודם.

נמצא תחילה את $f_1=a_1+b_1t$.

צריך להתקיים $a_1=2,b_1=-2\Leftarrow a_1+\frac{b_1}{2}=1,2a_1+2b_1=0\Leftarrow\varphi_1(f_1)=1,\varphi_2(f_1)=0$

וסה"כ קיבלנו ש $f_1=2-2t$.

נמצא כעת את $f_2=a_2+b_2t$.

צריך להתקיים $a_2=-\frac{1}{2},b_2=1\Leftarrow a_2+\frac{b_2}{2}=0,2a_2+2b_2=1\Leftarrow\varphi_1(f_2)=0,\varphi_2(f_2)=1$

וסה"כ קיבלנו ש $f_2=-\frac{1}{2}+t$.

$$\left\{\hat{v}_1(\varphi)=\varphi(2-2t),\hat{v}_2(\varphi)=\varphi\left(-\frac{1}{2}+t\right)\right\}$$

<u>בדיקה</u>

נראה שאכן מתקיים

$$\hat{v}_1(\varphi_2)=0\quad\hat{v}_1(\varphi_1)=1$$

$$\hat{v}_2(\varphi_1)=1\quad\hat{v}_2(\varphi_1)=0$$

$$\hat{v}_1(\varphi_1)=\varphi_1(2-2t)=\int_0^1(2-2t)dt=1,\hat{v}_2(\varphi_1)=\varphi_1\left(-\frac{1}{2}+t\right)=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}+t\right)dt=0$$

.

$$\hat{v}_1(\varphi_2)=\varphi_2(2-2t)=\int_0^2(2-2t)dt=0,\hat{v}_2(\varphi_2)=\varphi_2\left(-\frac{1}{2}+t\right)=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}+t\right)dt=1$$

תרגיל

הוכח את הטענה הבאה:

יהי V מרחב וקטורי n מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי $u \neq v \in V$, אזי קיים פונקציונל ליניארי $\varphi \in V^*$ כך ש $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. באופן שקול – לכל $0 \neq w \in V$ קיים $\varphi \in V^*$ כך ש $\varphi(w) \neq 0$.

פתרון

תחילה נוכיח את שקילות הטענות:

$\Leftarrow$

יהי $0 \neq w \in V$. נתון שלכל $u \neq v \in V$ קיים פונקציונל ליניארי $\varphi \in V^*$ כך ש $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ ובפרט עבור $0 \neq w \in V$ קיים פונקציונל ליניארי $\varphi \in V^*$ כך ש $\varphi(w) \neq \varphi(0)$ מכיוון ש $\varphi \in V^*$ אופרטור ליניארי נקבל ש $\varphi(0) = 0$ וסה"כ נקבל $\varphi(w) \neq 0$.

$\Rightarrow$

יהי $u \neq v \in V$. נתון ש לכל $0 \neq w \in V$ קיים $\varphi \in V^*$ כך ש $\varphi(w) \neq 0$ ובפרט עבור $w = u - v$ קיים $\varphi \in V^*$ כך ש $0 \neq \varphi(w) = \varphi(u-v) = \varphi(u) - \varphi(v)$ ז"א $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

נוכיח את הטענה לכל $0 \neq w \in V$ קיים $\varphi \in V^*$ כך ש $\varphi(w) \neq 0$.

יהי $w \in V$, יהי $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ בסיס של V ו $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ הבסיס הדואלי.

מכיוון ש $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ בסיס של V קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ כך ש $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ ומכיוון ש $w \neq 0$ לפחות אחד מהסקלרים $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ שונה מאפס ז"א קיים $1 \leq k \leq n$ כך ש $\alpha_k \neq 0$.

על פי הגדרת הבסיס הדואלי $\varphi_i(v_j) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

ולכן $\varphi_k(w) = \varphi_k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_k(v_i) = \alpha_k \neq 0$

הגדרה

יהי V מרחב וקטורי ו S תת קבוצה של V נגדיר את מרחב האפס של S ע"י $S^0 = \{\varphi \in V^* : \varphi(v) = 0; \forall v \in S\}$.

הערה

בהרצאה ראיתם ש S^0 תת מרחב של V^*.

תרגיל ממבחן תשע"ב מועד ב

א. נסח את ממשפט ההצגה של ריס.

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב.
הוכח: לכל $\varphi \in U^0$ קיים $w \in U^\perp$ יחיד כך ש $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$ לכל $v \in V$.

פתרון

א. לכל פונקציונאלי ליניארי φ יש וקטור יחיד u כך ש $\varphi(v) = \langle v, u \rangle$ לכל $v \in V$.

ב. יהי $\varphi \in U^0$ ובפרט $\varphi \in V^*$ וממשפט ההצגה של ריס נקבל שקיים $w \in V$ יחיד כך ש $\varphi(v) = \langle v, w \rangle$ לכל $v \in V$. נשאר להוכיח ש $w \in U^\perp$ ז"א צריך להוכיח שלכל $u \in U$ מתקיים

$\langle u,w\rangle = 0$. יהי $u \in U$ ומכיוון ש $U \subseteq V$ נקבל ש $u \in V$ ואז $\varphi(u) = \langle u,w\rangle$ ומכיוון ש $\varphi \in U^0$ נקבל ש $\varphi(u) = 0$ ואז $\langle u,w\rangle = 0$ כדרוש.

<u>תרגיל ממבחן תשע"ג מועד ב</u>

יהי V מרחב וקטורי. עבור קבוצה $S \subseteq V$, נסמן $S^0 = \{\varphi \in V^* : \varphi(v) = 0; \forall v \in S\}$.

לכל תת מרחב U של V מתקיים $\dim U + \dim U^0 = \dim V$ (אינך מתבקש להוכיח זאת.)

הוכח: יהיו $U,W \subseteq V$ תת מרחבים. אזי $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.

<u>פתרון</u>

נוכיח תחילה ש $U^0 + W^0 \subseteq (U \cap W)^0$.

יהי $\alpha \in U^0 + W^0$ ז"א $\alpha = \beta + \gamma$ כאשר $\beta \in U^0 \wedge \gamma \in W^0$.

יהי $v \in U \cap W$. $v \in U \cap W$ ולכן $v \in U$ מכיוון ש $\beta \in U^0$ נקבל ש $\beta(v) = 0$.

$v \in U \cap W$ ולכן $v \in W$ מכיוון ש $\gamma \in W^0$ נקבל ש $\gamma(v) = 0$.

סה"כ נקבל ש $\alpha(v) = \beta(v) + \gamma(v) = 0 + 0 = 0$ ולכן $\alpha \in (U \cap W)^0$.

כעת כדי ניתן להוכיח שוויון נראה ש $\dim(U^0 + W^0) = \dim(U \cap W)^0$

ונשתמש במשפט $\dim U = \dim V \wedge U \subseteq V \Rightarrow U = V$.

על פי משפט המימדים $\dim(U^0 + W^0) = \dim U^0 + \dim W^0 - \dim(U^0 \cap W^0)$

ומכיוון ש לכל תת מרחב U של V מתקיים $\dim U + \dim U^0 = \dim V$ נקבל ש

$$\dim(U^0 + W^0) + \dim U + \dim W = \dim U^0 + \dim U + \dim W^0 + \dim W - \dim(U^0 \cap W^0) =$$
$$2\dim V - \dim(U^0 \cap W^0)$$

סה"כ קיבלנו ש $\dim(U^0 + W^0) + \dim U + \dim W = 2\dim V - \dim(U^0 \cap W^0)$

ז"א $\dim(U^0 + W^0) = 2\dim V - \dim U - \dim W - \dim(U^0 \cap W^0)$.

לפי משפט המימדים

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \Rightarrow \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$$

ומכיוון ש $\dim(U + W) + \dim(U + W)^0 = \dim V$ נקבל ש

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W + \dim(U + W)^0 - \dim V$$

ומכיוון ש $\dim(U \cap W)^0 + \dim(U \cap W) = \dim V \Rightarrow \dim(U \cap W)^0 = \dim V - \dim(U \cap W)$

נציב את הביטוי הקודם ונקבל ש

$$\dim(U \cap W)^0 = 2\dim V - \dim U - \dim W - \dim(U + W)^0$$

נשאר להוכיח ש $\dim(U^0 \cap W^0) = \dim(U + W)^0$ נוכיח שהמרחבים וקטורים שווים ואז גם המימדים שווים.

נוכיח ש $U^0 \cap W^0 \subseteq (U + W)^0$.

יהי $\alpha \in (U + W)^0$. יהי $u \in U$ מכיוון ש $U \subseteq U + W$ נקבל ש $u \in U + W$ ומכיוון ש $\alpha \in (U + W)^0$ נקבל ש $\alpha(u) = 0 \Rightarrow \alpha \in U^0$

יהי $w \in W$ מכיוון ש $W \subseteq U + W$ נקבל ש $w \in U + W$ ומכיוון ש $\alpha \in (U + W)^0$ נקבל ש $\alpha(w) = 0 \Rightarrow \alpha \in W^0$ וסה"כ קיבלנו ש $\alpha \in U^0 \cap W^0$.

נוכיח ש $(U+W)^0 \subseteq U^0 \cap W^0$.

יהי $\alpha \in U^0 \cap W^0$. יהי $v \in U+W$ ז"א $v=u+w$ כאשר $u \in U \wedge w \in W$.

מכיוון ש $\alpha \in U^0 \cap W^0$ נקבל ש $\alpha \in U^0$ ואז $\alpha(u)=0$.

מכיוון ש $\alpha \in U^0 \cap W^0$ נקבל ש $\alpha \in W^0$ ואז $\alpha(w)=0$.

סה"כ נקבל ש $\alpha(v)=\alpha(u+w)=\alpha(u)+\alpha(w)=0+0=0$ ז"א $\alpha \in (U+W)^0$.