תרגול 13

9 ביולי 2013

מטריצה חיובית

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. Aתקרא חיובית (חיובית לחלוטין) אם לכל $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $< Av, v >= v^tAv \geq 0$ (מתקיים $< Av, v >= v^tAv > 0$).

משפט: A חיובית $\Leftrightarrow$ כל ע"ע $0 \leq$

הוכחה: $(\Leftarrow)$ יהא λע"ע $Av = \lambda v \Leftarrow$ $0 \leq v^tAv = \lambda v^tv = \lambda||v||^2 \Leftarrow$ $0 \leq \lambda$

$(\Rightarrow)$ יהיו $\{v_1, \dots v_n\}$ בסיס א"נ של ו"ע. יהיה $v \in \mathbb{R}^n$ אזי $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

$Av = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i Av_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i$ ולכן כיוון שכל ע"ע גדולים שווים 0 מתקיים:

$$< Av, v >=< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i < v_i, v_i >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i ||v_i||^2 \geq 0$$

הערה: באותו אופן מוכיחים A חיובית לחלוטין $\Leftrightarrow$ כל ע"ע $0 <$

דוגמא: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ראינו שע"ע שלה הם $1, 3$ ולכן A חיובית לחלוטין.

העתקות לינאריות (ה"ל):

הגדרה: יהיו V, W שני מ"ו מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. ה"ל היא פונקציה $T : V \to W$ כך ש לכל $v_1, v_2 \in V,\ \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$.

תכונות בסיסיות:

1. $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n)$
2. $T(0_V) = 0_W$

דוגמאות:

1. יהיו $V = \mathbb{F}^n,\ W = \mathbb{F}^m$ שניהם מעל $\mathbb{F}$. $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$
   אזי העתקה $L_A : V \to W$ המוגדרת $v \mapsto Av$ היא ה"ל.
   הוכחה: לכל $v_1, v_2 \in V,\ \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $L_A(\alpha v_1 + v_2) = A(\alpha v_1 + v_2) = \alpha A v_1 + A v_2 = \alpha L_A(v_1) + L_A(v_2)$.
2. $V = \mathbb{F}^{n\times n},\ W = \mathbb{F}$ שניהם מעל $\mathbb{F}$.
   אזי העתקה $trace : V \to W$ המוגדרת $A \mapsto tr(A)$ היא ה"ל.

3. $V=\mathbb{R}_n[x],\, W=\mathbb{R}_{n-1}[x]$ שניהם מעל $\mathbb{R}$.
אזי העתקה $D:V\to W$ המוגדרת $p(x)\mapsto \frac{d}{dx}p(x)=p'(x)$ היא ה"ל. הוכחה

$$D[\alpha p_1(x)+p_2(x)] \;=\; [\alpha p_1(x)+p_2(x)]'=\alpha p_1'(x)+p_2'(x)=\alpha D[p_1(x)]+D[p_2(x)]$$

תרגיל: יהיו $T,S:V\to W$ שתי ה"ל. $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל V. נניח $T(v_i)=S(v_i)$ לכל $1\le i\le n$

הוכח: $T=S$ (כלומר לכל $v\in V$ מתקיים $T(v)=S(v)$)

הוכחה: יהי $v\in V$ אזי $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$. $\Leftarrow$

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n)=\alpha_1T(v_1)+\alpha_2T(v_2)+\cdots+\alpha_nT(v_n)\\ &= \alpha_1S(v_1)+\alpha_2S(v_2)+\cdots+\alpha_nS(v_n)=S(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n)=S(v)\end{aligned}$$

משפט (ההגדרה של ה"ל): יהיו V,W שני מ"ו מעל $\mathbb{F}$. $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ל V.
$w_1,\dots,w_n\in W$ וקטורים כלשהם.

אזי קימת ה"ל יחידה $T:V\to W$ כך ש $T(v_i)=w_i$ לכל i

(מסקנה ניתן להגדיר ה"ל יחידה ע"י קביעה לאן ישלח בסיס ל V).

דוגמאות:

1. $V=\mathbb{R}_2[x]$ שניהם מעל $\mathbb{R}$. תהא $T:V\to V$ ה"ל המקימת $T(1)=x+2,\, T(x)=1,\, T(x^2)=-2x+1$.
כתוב את העתקה מפורשות (כלומר לאן T שולחת פולינום כללי $a+bx+cx^2$)
פתרון:

$$\begin{aligned} T(a+bx+cx^2) &= aT(1)+bT(x)+cT(x^2)\\ &= a(x+2)+b(1)+c(-2x+1)=(2a+b+c)+(a-2c)x\end{aligned}$$

2. $V=\mathbb{R}^3,\, W=\mathbb{R}^2$ מצא ה"ל $T:V\to W$ המעבירה את המישור $U=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:x+y+z=0\}\subset V$ ל W.

פתרון: $U=\{\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}\}=span\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$.

נשלים לבסיס ל V בעזרת $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\}$. (3 וקטורים בת"ל= בסיס ל V)

נגדיר $T(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\, T(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\, T(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

עפ"י משפט ההגדרה אכן הגדרו ה"ל.
בנוסף מתקיים

$$\begin{aligned} T(U) &= T(\{x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}) \\ &= \{T\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\} \\ &= \{xT(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix})+yT(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}) \\ &= \{x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2=W \end{aligned}$$

כנדרש.

הגדרות:
תהא $T:V\to W$ ה"ל.

1. הגרעין של T מוגדר $kerT=\{v\in V\,|\,T(v)=0\}\subset V$
2. התמונה של T מוגדרת $ImgT=\{T(v)\,|\,v\in V\}\subset W$
3. הדרגה של Tמוגדרת $rank(T)=dim(ImgT)$
4. האפסיות של T מוגדרת $\nu(T)=dim(kerT)$

משפט הדרגה:
תהא $T:V\to W$ ה"ל. אזי $\nu(T)+rank(T)=dim(V)$.
תרגיל: $V=\mathbb{R}_2[x],\,W=\mathbb{R}^2$ נגדיר $T:V\to W$ ה"ל באופן הבא
$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. מצא גרעין, תמונה, דרגה ואפסיות של T
פתרון:

$$\begin{aligned} kerT &= \{p(x)=a+bx+cx^2\in V\,|\,T(p(x))=0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\} \\ &= \{a+bx+cx^2\in V\,|\,\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}=\{cx^2\in V\}=span(x^2) \end{aligned}$$

$$ImgT=\{T(p(x))\,|p(x)\in V\}=\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\,|\,a+bx+cx^2\in V\}=\mathbb{R}^2=span\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$$

בנוסף $\nu(T)=1,\,rank(T)=2$ ואכן $1+2=dimV=3$
משפטון: תהא $T:V\to W$ ה"ל.

אזי Tחח"ע $\Leftrightarrow \{0\} = kerT$

תרגיל: $V=\mathbb{R}_2[x],\, W=\mathbb{R}^2$ האם קימת $T:V\to W$ ה"ל חח"ע?

פתרון: לא. נימוק: לפי משפט הדרגה $\nu(T)+rank(T)=dim(V)=3$ כיוון ש $ImgT\subset W$ אזי $rankT\le dimW=2$ ולכן $\nu(T)\ge 1$ כלומר קים $0\neq p(x)\in V$ כך ש $T(p(x))=0 \Leftarrow T$ לא חח"ע.

תרגיל: תהא $T:V\to W$ ה"ל חח"ע. $B=\{v_1\ldots,v_n\}\subset V$קבוצה בת"ל

(חח"ע פירושו עבור $v_1\neq v_2\in V \Leftarrow T(v_1)\neq T(v_2)$. שקול ל $T(v_1)=T(v_2)$ $\Leftarrow v_1=v_2$)

הוכח: $C=\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}\subset W$ בת"ל.

פתרון: נניח $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0$ צ"ל $\alpha_i=0$ לכל i.

$T(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i v_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i)=0=T(0)$ כיוון ש T חח"ע נקבל $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0$ כיוון ש B בת"ל $\alpha_i=0$ לכל i.

מסקנה $dimV\le dimW$

הוכחה (נוכיח עבור המקרה הסופי): נבחר $B=\{v_1\ldots,v_n\}$ בסיס ונסמן $C=\{T(v_1),\ldots,T(v_n)\}$

$dimV=n=|B|=|C|\le dimW$.

הצגה לפי בסיס

המטרה של החלק הזה להראות כי יש קשר חזק בין ה"ל למטריצות.

הגדרה: יהא Vמ"ו מעל $\mathbb{F}$. $B=\{v_1,\ldots v_n\}$ בסיס ל V. יהא $v\in V$ ראינו שניתן להציגו באופן יחיד כצ"ל של איברי . $v=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$. ההצגה של v לפי בסיס B הוא הוקטור

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n.$$

דוגמא $V=\mathbb{R}_2[x]$נציג את $v=1+x\in V$ לפי הבסיסים הבאים

1. $B=\{1,x,x^2\}$הבסיס הסטנדרטי:

$$1+x=1\cdot 1+1\cdot x+0\cdot x^2 \text{ ולכן } [v]_B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

2. $B'=\{1,2+x,3+x^2\}$

$$1+x=-1\cdot 1+1\cdot(2+x)+0\cdot(3+x^2) \text{ ולכן } [v]_{B'}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

הגדרה: תהא $T:V\to W$ ה"ל. $E=\{v_1,\ldots v_n\}$ בסיס ל V. $F=\{w_1,\ldots w_m\}$ בסיס ל W. אזי המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים E,F הינה

$$[T]_F^E=A=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(v_1)]_F & [T(v_2)]_F & \cdots & [T(v_n)]_F \\ | & | & & | \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{m\times n}$$

דוגמא: $V=\mathbb{R}_2[x],\ W=\mathbb{R}^2$. $E=\{-1,2+x,3+x+x^2\},F=\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$
בסיסים בהתאמה
נגדיר $T:V\to W$ ה"ל באופן הבא $T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}b+c\\a\end{pmatrix}$.
מצא את $[T]_F^E$
פתרון: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot(-1)+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot 1=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=T(-1)\Leftarrow\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=[T(-1)]_F$

$$[T(2+x)]_F=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\Leftarrow T(2+x)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$[T(3+x+x^2)]_F=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\Leftarrow T(3+x+x^2)=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

ולכן $[T]_F^E=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&3\end{pmatrix}$

משפט: תהא $T:V\to W$ ה"ל. $E=\{v_1,\dots v_n\}$
בסיס ל V. $F=\{w_1,\dots w_m\}$ בסיס ל W. נסמן $A=[T]_F^E$
אזי לכל $v\in V$ מתקיים $[T(v)]_F=[T]_F^E[v]_E=A[v]_E$
(כלומר להפעיל את T על וקטור שקול להפעיל מטריצה)

דוגמא: נמשיך עם הדוגמא ממקודם: $v=1+x+x^2\in V$ מהו $T(v)$?
פתרון: כמובן שאפשר לחשב ישירות. אנחנו נדגים את המשפט

$$[v]_E=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\Leftarrow 1+x+x^2=2\cdot(-1)+0\cdot(2+x)+1\cdot(3+x+x^2)$$

לפי המשפט $[T(v)]_F=[T]_F^E[v]_E=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

ולכן $T(v)=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

הערות:

1. אם $T:V\to V$ B,B' שני בסיסים אזי קימת מטריצה הפיכה P
כך ש $[T]_B^B=P[T]_{B'}^{B'}P^{-1}$(כלומר בעזרת יחס הדומות ניתן לעבור מבסיס לבסיס)

2. בעזרת המשפט הנ"ל ניתן לחקור ה"ל בעזרת מטריצות. ההתאמות הבאות מתקיימות (נסמן : $A=[T]_F^E$):

(א) $rank(T)=rank(A)$
(ב) $imgT\leftrightarrow C(A)$
(ג) $kerT\leftrightarrow N(A)$
(ד) $T=id\leftrightarrow A=I$ מטריצת הזהות
(ה) $T=0\leftrightarrow A=0$ מטריצת האפס
(ו) $Tv=\lambda v\leftrightarrow A[v]_F=\lambda[v]_F$
(ז) ועוד...