פתרון תרגיל בית 4 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ו

27 במרץ 2016

1. בכמה דרכים ניתן לבחור שלושה מספרים בין 1 ל־100 שסכומם זוגי?

פיתרון:

יש שני סוגי בחירות:

1. שלושה מספרים זוגיים. מספר הבחירות של שלושה מספרים זוגיים בטווח הנתון הוא $\binom{50}{3}$.
2. שני מספרים אי־זוגיים ואחד זוגי. מספר הבחירות כאן הוא $\binom{50}{1}\cdot\binom{50}{2}$.

סה"כ: $\binom{50}{1}\cdot\binom{50}{2}+\binom{50}{3}$ (כי קבוצת הבחירות של (1) וקבוצת הבחירות של (2) זרות).

2. כמה מחלקים טבעיים (ללא שארית, כמובן) שונים יש למספר 600? (רמז: העזרו בפירוק המספר לראשוניים.)

פיתרון:

נשים לב ש־ $600 = 2^3\cdot 3\cdot 5^2$, לכן כל מספר מהצורה $2^i\cdot 3^j\cdot 5^k$ כאשר $0\le i\le 3, 0\le i\le 1, 0\le k\le 2$ מחלק את 600. לכן מספר המחלקים הוא: $|\{0,1,2,3\}|\cdot|\{0,1\}|\cdot|\{0,1,2\}| = 4\cdot 2\cdot 3$.

3. כמה מספרים בין 1000 ל־10000 סכום הספרות שלהם הוא 8?

פיתרון:

כמות המספרים הנ"ל שקולה לכמות הפתרונות של המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=8$, כאשר $\forall i: x_i\ge 0$ שלם, ו־$x_1\ge 1$ (המשתנים הם הספרות). נוריד 1 מ־x_1 ומאגף ימין ונקבל את המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ כאשר $\forall i: x_i\ge 0$ שלם, שמספר פתרונותיה, כפי שלמדנו, הוא: $\binom{10}{7}$.

4. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=5766$, כאשר x_i הם מספרים שלמים אי־זוגיים חיוביים?

פיתרון:

נוריד 1 מכל משתנה ו־4 מאגף ימין ונקבל משוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=5762$ כאשר $x_i\ge 0$ זוגיים. כעת נחלק את המשוואה ב־2 ונקבל את המשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=2881$ כאשר $x_i\ge 0$ שלמים, שמספר פתרונותיה הוא: $\binom{2884}{2881}$.

5. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=30$, כאשר $x_i\le 20$ שלמים (לא בהכרח אי שליליים)?

פיתרון:

נמיר כל משתנה בנגדי שלו (כלומר, נסמן $x_i'=-x_i$) ונקבל משוואה חדשה $x_1'+x_2'+x_3'+x_4'=-30$ כאשר $x_i'\ge -20$. נוסיף 20 לכל משתנה ו־80 לאגף ימין ונקבל את המשוואה $x_1'+x_2'+x_3'+x_4'=50$ כאשר $x_i'\ge 0$ שלם, שמספר פתרונותיה הוא: $\binom{53}{50}$.

6. השתמשו בנוסחת הבינום של ניוטון:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

והוכיחו בדרך אלגברית את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ (הערה: אין צורך לפתוח את הביטוי $\binom{n}{k}$).

פיתרון:

נציב בנוסחת הבינום $a=b=1$ ונקבל מצד שמאל בנוסחה 2^n, ומצד ימין, לכל k (וכמובן גם לכל $n-k$) מתקיים $a^k=b^k=1^k=1$, ולכן $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.