פיתרון תרגיל בית 9 במתמטיקה בדידה 2

83-118 סמסטר ב' תשע"ו

15 במאי 2016

1. יהי $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. כמה סדרות (לאו דוקא מאותו אורך) מהספרות $1,2$ (כלומר, $\forall i: a_i \in \{1,2\}$) יש, שסכום איבריהן הוא n?

פיתרון התשובה היא שזהו מספר פיבונאצ'י F_n. נראה זאת באינדוקציה: עבור $n=0, n=1$, הדבר ברור שיש רק סדרה אחת אפשרית. נניח נכונות לכל $k<n$, ונתבונן ב־n. נחלק את הסדרות לשתי קבוצות: 1. אלה המתחילות בספרה 1, שכאלה יש כמספר הסדרות שסכומן עולה $n-1$, $F(n-1)$. 2. אלה המתחילות בספרה 2 שכאלה יש כמספר הסדרות שסכומן עולה $n-2$, $F(n-2)$. בסה"ע נקבל שמספר הסדרות שסכומן n הוא:

$$F(n-1)+F(n-2)=F(n)$$

2. כמה תתי קבוצות של $\{1,\ldots,n\}$ יש שאינן מכילות זוג מספרים עוקבים?

פיתרון נסמן את המספר הזה ב־A_n, ונראה שזהו מספר פיבונאצ'י העוקב, כלומר: $A_n=F_{n+1}$. הבסיס הוא: מספר תתי קבוצות של הקבוצה הריקה הוא 1 והיא לא מכילה זוג עוקבים, כלומר $A_0=1=F_1$. מספר תתי הקבוצות של $\{1\}$ הוא 2, ושתיהן לא מכילות זוג עוקבים, ולכן נקבל $A_1=2=F_2$. עבור $n \geq 2$, נניח נכונות לכל $k<n$ ונחלק לשתי אפשרויות: 1. תתי קבוצות שמכילות את n, כאן לא ניתן להכיל גם את $n-1$, ולכן זה כמספר תתי הקבוצות של $[n-2]$ (שעבור $n=2$ הכוונה ל־ϕ) שאינן מכילות זוג עוקבים, שזה $A_{n-2}=F_{n-1}$ מהנחת האינדוקציה. 2. תתי קבוצות שאינן מכילות את n, במקרה זה הן בדיוק כל תתי הקבוצות של $[n-1]$ שאינן מכילות זוג עוקבים, שזה $A_{n-1}=F(n)$ מהנחת האינדוקציה. בסה"כ קיבלנו $A_n=A_{n-1}+A_{n-2}=F_{n-1}+F_n=F_{n+1}$, שזה מספר פיבונאצ'י.

3. חידת הארנבים: זוג ארנבים מוליד בכל חודש, החל מהחודש השני לחייו, זוג ארנבים נוסף. זוג ארנבים בני יומם הוכנסו לחדר סגור בחודש ה־0. כמה זוגות יהיו בחדר בחודש ה־n (בהנחה שאף אחד לא מת שם...)?

פיתרון גם התשובה לשאלה זו היא $F(n)$. נוכיח באינדוקציה: בסיס האינדוקציה: בחודש 0 יש רק את הזוג הראשון ובחודש 1 עדיין רק הוא נמצא כי טרם הגיע לגיל ההולדה. מתאים לכך ש־ $F(0) = F(1) = 1$. נניח נכונות לכל $k < n$ ונראה שבדור ה־n יש $F(n)$ זוגות. נשים לב שמספר הזוגות ברי ההולדה בחודש ה־n הוא כמספר הזוגות הכללי בחודש ה־$n-1$, כי כל זוג מהחודש הקודם עודנו חי, שזה, לפי הנחת האינדוקציה, $F(n-1)$. כמה זוגות שאינם ברי הולדה יש בחודש ה־n? אלה שאינם ברי הולדה, הם אלה שנולדו מברי ההולדה בחודש ה־$n-1$, שזה, כפי שראינו, כמספר הזוגות בחודש שלפניו, כלומר $F(n-2)$ מהנחת האינדוקציה. בסה"כ מספר הזוגות הוא מספר ברי ההולדה ועוד מספר שאינם ברי הולדה, שזה: $F(n-1) + F(n-2)$, כדרוש.

4. יהיו $2 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$, הוכיחו כי $\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left\{ {i \atop k-1} \right\}$:

פיתרון נחלק את $[n]$ ל־k תתי קבוצות זרות לא ריקות באופן הבא: לכל מספר $k-1 \leq i \leq n-1$ נבחר מתוך $[n-1]$ תת קבוצה מגודל i, שזה ניתן להיעשות ב־$\binom{n-1}{i}$ אפשרויות. את תת הקבוצה שנבחרה נחלק ל־$k-1$ תתי קבוצות זרות לא ריקות ב־$\left\{ {i \atop k-1} \right\}$ אפשרויות, ושאר האיברים יהיו בתת קבוצה נוספת יחד עם n. שימו לב שאני תמיד משאיר את n לתת הקבוצה "האחרונה" ולא מאפשר לבחור אותו כחלק מ־i האיברים שמחלקים ל־$k-1$ תתי קבוצות, כדי למנוע כפילויות.

5. הוכיחו כי $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$. נסו לעשות זאת ללא שימוש בנוסחאות רקורסיביות.

פיתרון אנו רוצים לחלק את $[n]$ לשתי תתי קבוצות זרות לא ריקות. לכל מספר מהקבוצה $[n-1]$ יש אחת משתי אפשרויות: להיות בתת הקבוצה יחד עם n או לא. מספר האפשרויות יוצא 2^{n-1}. אבל אסור שכולם יהיו יחד עם n באותה תת קבוצה, כי אז נקבל חלוקה לתת קבוצה אחת, ולכן צריך להחסיר את האפשרות הזו. בסה"כ נקבל $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$

6. הוכיחו שמספר הפונקציות $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ שהן **על** הוא $k!\left\{ {n \atop k} \right\}$.

פיתרון נראה שכל חלוקה מגדירה לנו $k!$ פונקציות על שונות: תהא $A_1, ..., A_k$ חלוקה. יש $k!$ אפשרויות לסדר את החלוקה הזו בשורה, וכל סידור מגדיר פונקציה על ע"י שנשלח את כל איברי תת הקבוצה מהמקום ה־i בשורה ל־i (הפונקציות שונות כי אם שני סידורים שונים ז"א שיש לפחות שני מקומות בשורה בהם אין הסכמה, ואז גם הפונקציה לא מסכימה). ההתאמה היא על: כל פונקציה מגיעה מהחלוקה: נחלק לכל המקורות של כל איבר. לכן בסה"כ מספר הפונקציות הוא $k!\left\{ {n \atop k} \right\}$.

7. סדרת פל מוגדרת באופן הבא: $P(0) = 0, P(1) = 1$ ולכל $n \geq 2$ מגדירים $P(n) = 2P(n-1) + P(n-2)$. מצא את ההצגה האלגברית של האיבר הכללי $P(n)$.

פיתרון הפתרונות של המשוואה $x^2 - 2x - 1 = 0$ הם $\lambda = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \mu = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$. לכן הפיתרון הוא $P(n) = \alpha \cdot \lambda^n + \beta \cdot \mu^n$. נמצא את α, β ע"י פתרון המערכת:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) = 1 \end{cases}$$

נציב במשוואה השנייה $\beta=-\alpha$ ונקבל $\alpha(1+\sqrt{2})-\alpha(1-\sqrt{2})=1$ ולכן $\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}},\beta=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$. ולכן בסה"כ מתקיים:

$$P(n)=\frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

8. תהי A קבוצה עם $|A|=n$. כמה יחסי שקילות ניתן להגדיר על A עם k מחלקות שקילות?

פיתרון בבדידה 1 ראינו משפט שכל יחס שקילות מגדיר חלוקה של A לתתי קבוצות זרות לא ריקות, שכל אחת היא מחלקת שקילות בפנ"ע, ולכל חלוקה כנ"ל מגדירה יחס שקילות (כלומר יש התאמה חח"ע ועל בין אוסף יחסי השקילות לבין חלוקות). לכן נקבל שמספר היחסים עם k מחלקות שקילות הוא כמספר החלוקות של $[n]$ ל־k תתי קבוצות זרות לא ריקות, כלומר $\left\{{n \atop k}\right\}$.