## משפט הערך הממוצע של גאוס

אם $f$ פונקציה אנליטית בתחום $|z-a|<R$, אזי

$$f\left(a\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(a+re^{i\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta\qquad 0<r<R$$

## תרגיל

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\sin^{2}\left(\frac{\pi}{6}+2e^{i\theta}\right)\,\mathrm{d}\theta$$

$$f\left(z\right)=\sin^{2}\left(\frac{\pi}{6}+2z\right)$$

אנו מחשבים את הפונקציה עבור $z=0$ ומקבלים

$$f\left(0\right)=I=\sin^{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$$

## תרגיל

חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה $x^{2}-y^{2}+2y$ על המעגל $|z-5+2i|=3$

### פתרון

$$f\left(x,y\right)=x^{2}-y^{2}+2y$$

$$|z-5+2i|=3\Leftrightarrow z=5-2i+3e^{i\theta}\Leftrightarrow\left(5+3\cos\left(\theta\right);-2+3\sin\left(\theta\right)\right)\qquad 0<\theta<2\pi$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left[\left(5+3\cos\theta\right)^{2}-\left(-2+3\sin\theta\right)^{2}+2\left(-2+3\sin\theta\right)\right]\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left(17+30\cos\theta+9\cos2\theta+18\sin\theta\right)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\cdot17\cdot2\pi=17$$

## טורי חזקות

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

תחום ההתכנסות של הטור:

1. $D=\mathbb{C}$
2. $D=\{\alpha\}$, $z=\alpha$.
3. קיים $R>0$ כך ש

$$\{z||z-\alpha|<R\} \subseteq D \subseteq \{z||z-\alpha| \leq R\}$$

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

## טור טיילור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$$

רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של פונקצי $f$ סביב נקודה $z=\alpha$ הוא מרחק של $\alpha$ מנקוה סינגורלית הקרובה ביותר ל$\alpha$.

## משפט

תהי $f$ אנליטית בעיגול פתוח $D$ סביב נקודה $z=\alpha$, אזי $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$ לכל $z\in D$.

## משפט

בתוך עיגול ההתכנסות הפתוח, הטור $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ מתכנס לפונקציה אנליטית - וזהו למעשה טור טיילור שלה.

## דוגמה

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

## תרגיל

יש לפתח לטור טיילור את הפונקציות

1. $f(z) = e^z$
2. $f(z) = \dfrac{1}{z-i}$
3. $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$

### פתרון

1. $f^{(n)}(z) = e^z$, $f^{(n)}(0) = 1$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (z-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

הסכום מתכנס $\Leftarrow$ $S = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $b_n = b_0 \cdot q^{n-1}$ אם"ם $|q| < 1$ $\boxed{S = \dfrac{b_0}{1-q}}$

2.

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{(z-1)+(1-i)} = \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{i-1}} =$$

$$= \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{i-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(i-1)^{n+i}}}_{a_n} (z-1)^n$$

תנאי להתכנסות:

- דרך א':

$$\left|\frac{z-1}{i-1}\right| < 1 \qquad |z-1|, \sqrt{2}$$

- דרך ב': קיבלנו פיתוח סביב $z=1$. נק' סינגולרית של הפוקציה $z=i$. המרחק בין 1 ל־$i$ שווה ל־$\sqrt{2}$.

.3

$$f\left(z\right)=\frac{1}{\left(1-z\right)^{2}}$$

נשים לב ש

$$f\left(z\right)=\frac{1}{\left(1-z^{2}\right)}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}$$

אפשר לבצע גזירה איבר איבר

$$f\left(x\right)=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\sum_{i=0}^{\infty}n\cdot z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(n+1\right)}_{a_{n}}z^{n}$$

## תרגיל

$$f\left(z\right)=\begin{cases}\frac{z}{\sin z} & z\neq0\\ 1 & z=0\end{cases}$$

צ"ל שניתן לפתח את $f$ לטור חזקות סביב $z=0$ ויש למצוא את רדיוס ההתכנסות

## פתרון

$$\lim_{z\to0}\frac{f\left(0+z\right)-f\left(0\right)}{z-0}=\lim_{z\to0}\frac{\frac{z}{\sin z}-1}{z}=\lim_{z\to0}\frac{z-\sin z}{z\cdot\sin z}=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{1-\cos z}{\sin z+z\cos z}=\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{\cos z+\cos z-z\sin z}=\frac{0}{2}=0$$

קיבלנו ש־$f\left(z\right)$ גזירה בנקודה $z=0$. כלומר, $f\left(z\right)$ סגירה בכל סביבה פתוחה של $z=0$

$\Leftarrow$קיבלנו ש־$f$ אנליטית

$\Leftarrow$ניתן לפתח את $f\left(z\right)$ לטור טיילור סביב $z=0$.

**רדיוס ההתכנסות:**

נקודות סינגולריות של $f\left(z\right)$ הן $z_{n}=\partial n,n\in\mathbb{Z}\backslash\left\{ 0\right\}$. נקודות סינגולריות הקרובות ביותר ל־$z=0$ הם $z\pm\pi$, כלומר כדיוס ההתכנסות שווה ל־$\pi$.

## תרגיל

1. מצא פיתוח טיילור של פונקציה $f\left(z\right)=\dfrac{1}{1+z^{2}}$ סביב הראשית
2. בעזרת (1), יש חשב

$$I_{k}=\int_{C}\frac{\mathrm{d}z}{z^{k}\left(1+z^{2}\right)}\qquad C=\left\{ z\middle||z|=\frac{1}{2}\right\}$$

## פתרון

.1

$$f\left(z\right)=\frac{1}{1+z^{2}}=\frac{1}{1-\left(-z^{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^{2}\right)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\cdot z^{2n}$$

רדיוס ההתכנסות שווה ל1

2. לפי נוסחת קושי, מקבלים

$$f^{(k)}\left(0\right)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{C}\frac{\mathrm{d}z}{z^{(k+1)}\left(1+z^{2}\right)}=\frac{k!}{2\pi i}\cdot I_{k+1}$$

$$I_{k}=\frac{2\pi i\cdot f^{(k-1)}\left(0\right)}{\left(k-1\right)!}$$

לפי פיתוח של סעיף (1) נקבל

$$\frac{f^{(k)}\left(0\right)}{k!}=\begin{cases}\left(-1\right)^{\frac{k}{2}} & k\text{ is even}\\ 0 & k\text{ is odd}\end{cases}$$

$$I_{k}=\begin{cases}\left(-1\right)^{\frac{k-1}{2}}\cdot2\pi i & k\text{ is even}\\ 0 & k\text{ is odd}\end{cases}$$

## משפט

אם $f$ אנליטית בתחום $D$ וקיימת נקודה $z=\alpha\in D$ כך שהיא אפס מסדר אינסופיף אזי $\forall_{z\in D}f\left(z\right)=0$

## משפט יחידות

1. אם $f$ אנליטית בתחום $D$ וקיימת סדרה מתכנסת של נקודות $D \supseteq \{z_n\}$ כך שהגבול שלה ב$D$ כך שלכל $n$ מתקיים $f(z_n)=0$, אזי

$$\forall_{z\in D} f(z) \equiv 0$$

ניסוח שקול

2. אם $f,g$ פונקציות אנליטיות ב$D$, וקיימת סדרה מתכנסת $\{z_n\}$ כך שגבול שייך ל$D$, וכך שלכל $n$ מתקיים $f(z_n)=g(z_n)$ אזי

$$\forall_{z\in D} f(z) \equiv g(z)$$

## תרגיל

1. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots\right\}$
2. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$
3. $\{a_n\} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right)$

האם קיימת פונקציה אנליטית בנקודה $z=0$ שעבור סדרת הנקודות $\left\{z_n = \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מקבלת את סדרת הערכים $\{a_n\}$?