

## תרגיל בית 10 במבוא לתורת החבורות סמסטר א' תש"ף

**שאלה 1.** תהי  $G$  חבורת- $p$  סופית שאינה מסדר  $p$ .

א. הוכיחו כי  $G$  אינה פשוטה.

ב. תהי  $H \triangleleft G$  ת"ח נורמלית מסדר  $p$ . הוכיחו כי  $H \subseteq Z(G)$  (מה שאומר כמובן ש- $H \triangleleft Z(G)$ ).

**שאלה 2.** יהי  $p$  ראשוני.

א. הוכיחו כי כל חבורה מסדר  $p^2$  היא אבלית.

ב. תהי  $P \leq S_p$  תת-חבורת  $p$ -סילו. הוכיחו כי  $P$  אבלית.

ג. (רשות) תהי  $P \leq S_{p^2}$  תת-חבורת  $p$ -סילו. הוכיחו שיש לה תת-חבורה אבלית  $H \leq P$  שהיא מסדר  $p^2$ . רמז: מצאו תחילה  $H \leq S_{p^2}$  כזו, ואחר כך טפלו בעניין  $P$ .

**שאלה 3.** תהי  $G$  חבורה סופית, ונניח כי מספר ראשוני  $p$  מחלק את  $|G|$ . הוכיחו שקיים  $z \in G$  מסדר  $p$  כך ש- $C_G(z)$  מכיל תת-חבורת  $p$ -סילו של  $G$ . רמז: לתת-חבורת  $p$ -סילו יש מרכז לא טריוויאלי.

**שאלה 4.** תהי  $G$  חבורה מסדר אי-זוגי. הוכיחו שאם  $|G| < 21$  אז  $G$  אבלית. רשות: נסו למצוא חבורה לא אבלית מסדר 21.

**שאלה 5.** יהיו  $p \leq q$  ראשוניים (לאו דווקא שונים).

א. הוכיחו שכל חבורה מסדר  $pq^n$  עבור  $n \in \mathbb{N}$  אינה פשוטה.

ב. הוכיחו שגם חבורות מסדר 56 או 63 אינן פשוטות (זה שונה מהסעיף הקודם).

ג. (רשות, קשה מאוד!) תהי חבורה  $G$  מסדר  $p^a q^b$  עבור  $a, b \in \mathbb{N}$ . הוכיחו כי  $G$  אינה פשוטה לכמה שיותר זוגות אפשריים  $(a, b)$  שאתם מצליחים, שלא טיפלנו בהם עד כה בכיתה או בתרגיל.

רמז: התשובה היא לכל  $a, b$ . הוכחה לכך דורשת בדרך כלל כמה קורסים.

**שאלה 6.** תהי חבורה  $G$  מסדר  $p^t m$ , כאשר  $p$  ראשוני,  $m > 1$  טבעי שזר ל- $p$  ו- $t \in \mathbb{N}$ .

א. נניח ש- $|G|$  לא מחלק את  $m!$  (ניתן להסתפק בכך ש- $|G|$  לא מחלק את  $n_p!$ ). הוכיחו כי  $G$  לא פשוטה. רמז: העידון של משפט קיילי.

ב. הוכיחו שחבורות מסדרים 36, 150 או 160 אינן פשוטות.

**שאלה 7.** (רשות) תהי  $G$  חבורה מסדר  $n$ . הוכיחו כי השיכון  $G \rightarrow S_n$  ממשפט קיילי אינו שיכון לתוך  $A_n$  אם ורק אם תת-חבורה 2-סילו של  $G$  היא ציקלית לא טריוויאלית. רמז: העזרו בשאלה מתרגיל בית קודם.

**בהצלחה!**