פתרון תרגיל בית 1 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1 (חימום)**.** תהי G חבורה עם איבר יחידה e. יהי $a \in G$ איבר. הוכיחו:

א. אם $aa = a$, אז $a = e$.

ב. אם יש $b \in G$ כך ש-$ab = e$, אז $ba = e$ ו-$b = a^{-1}$.

פתרון.

א. מפני ש-$a \in G$ איבר בחבורה, אזי קיים לו הופכי a^{-1}. נכפול את שני אגפי המשוואה ב-a^{-1} מימין (אותה תוצאה תתקבל בכפל משמאל) ונקבל

$$aaa^{-1} = aa^{-1}$$
$$a = e$$

ב. בחבורה כל איבר הוא הפיך. אם $ab = e$, אזי b הופכי ימני של a. אם c הוא הופכי שמאלי כלשהו של a, אזי

$$b = e \cdot b = (ca)b = c(ab) = c \cdot e = c$$

כלומר $c = b$. לכן $b = a^{-1}$ הוא ההופכי של a ו-$ba = e$.

שאלה 2. בחרו כמה סעיפים וענו עבור המערכת האלגברית המופיעה בו:
האם היא אגודה?
האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה?
האם היא חבורה?
האם הפעולה היא חילופית?

א. $(\mathbb{N}, \max)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ב. $(\mathbb{N}, *)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה $a * b = a + b + 2$.

ג. תהי X קבוצה. $(P(X), \triangle)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של X. הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A, B \in P(X)$ לפי $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

ד. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ה. $(A, \cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ו. $(\mathbb{Q}\setminus\{-1\},*)$, המספרים הרציונלים בלי -1 עם הפעולה $a*b=a+b+ab$.

פתרון. לא נציין מפורשות בכל סעיף שאם מבנה אלגברי הוא חבורה, אז הוא גם מונואיד, ולכן גם אגודה. ולהפך, אם הוא לא אגודה, אז ודאי שהוא גם לא מונואיד וכו'.

א. הסגירות של הפעולה ברורה. הפעולה קיבוצית כי

$$\max\{\max\{a,b\},c\}=\max\{a,b,c\}=\max\{a,\max\{b,c\}\}$$

איבר היחידה הוא 1 כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\max\{n,1\}=\max\{1,n\}=n$. אין הפיך לאף איבר פרט ל-1, ולכן מדובר במונואיד. הפעולה חילופית.

ב. מבנה זה הוא אגודה כי ישנה סגירות והפעולה קיבוצית, שכן מתקיים $(a*b)*c=a+b+c+4=a*(b*c)$. הפעולה חילופית עקב חילופיות החיבור הרגיל בטבעיים. לא מדובר במונואיד כי אילו היה איבר יחידה, אזי הוא היה -2 שאינו מספר טבעי.

ג. מבנה זה הוא חבורה. סגירות נובעת מכך שאם $A,B\in P(X)$, אז גם $A\triangle B$ היא תת־קבוצה של X. קיבוציות הפעולה ידועה ממתמטיקה בדידה. איבר היחידה הוא הקבוצה הריקה. קל לבדוק שכל איבר הוא ההופכי של עצמו. הפעולה (כפי ששמה רומז) היא חילופית.

ד. הפעולה לא סגורה, למשל

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\notin A$$

ולכן לא מדובר באגודה. הפעולה חילופית.

ה. מבנה זה הוא חבורה. הסגירות לא מיידית, שכן לא מספיק להראות שמכפלת שני איברים הוא מטריצה, אלא מטריצה ששייכת ל-A:

$$\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&d\\-d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac-bd&bc+ad\\-(bc+ad)&ac-bd\end{pmatrix}$$

ולשים לב כי $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$ שהיא הדטרמיננטה של המכפלה היא מכפלה של דטרמיננטות חיוביות, ולכן חיובית בעצמה. הפעולה קיבוצית כי כפל מטריצות הוא קיבוצי. איבר היחידה הוא מטריצת היחידה I_2. כל מטריצה במבנה זה היא הפיכה מפני שמתקיים $a^2+b^2>0$ שהיא הדטרמיננטה, כשהאיבר ההופכי הוא

$$\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$$

ודאו למה מטריצה זו שייכת למבנה. בדיקה ישירה תראה שהפעולה חילופית.

ו. מבנה זה הוא חבורה חילופית. הפעולה קיבוצית כי

$$\begin{aligned}(a*b)*c&=(a+b+ab)*c=a+b+ab+c+ac+bc+abc\\&=a+b+c+bc+ab+ac+abc=a*(b+c+bc)=a*(b*c)\end{aligned}$$

כאשר אנחנו נעזרים בחילופיות של החיבור בשיוויון בין השורות. בעזרת החילופיות גם של כפל רגיל נראה שהפעולה חילופית:

$$a*b=a+b+ab=b+a+ba=b*a$$

לכל $a \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ מתקיים $a*0 = a+0+a\cdot 0 = a$ ולכן איבר היחידה הוא $e = 0$.
נמצא שכל איבר הפיך כי $a*b = a+b+ab = 0$ אם ורק אם $b(1+a) = -a$,
כלומר $b = \frac{-a}{1+a}$ והקבוצה לא כוללת את -1, ולכן אין חלוקה באפס ובנוסף ברור כי $b \neq -1$ (אחרת $-1 = \frac{-a}{1+a}$ ונסיק $1 = 0$).

שאלה 3. תהינה $(G,*)$ ו-$(H,\bullet)$ חבורות. נגדיר על המכפלה הקרטזית $G \times H$ פעולה "רכיב-רכיב":

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$$

לכל $g_1,g_2 \in G, h_1,h_2 \in H$.

א. הוכיחו כי $G\times H$ עם הפעולה לעיל היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו-H.

ב. הוכיחו או הפריכו: החבורה $G \times H$ אבלית אם ורק אם G ו-H אבליות.

פתרון.

א. ההוכחה לכל אחד מהתנאים בהגדרת חבורה (קיבוציות הפעולה, קיום איבר יחידה וקיום הפיך לכל איבר) נובעת מהתנאי המקביל שמתקיים עבור G ו-H שהן חבורות.
יהיו $(g_1,h_1),(g_2,h_2),(g_3,h_3) \in G \times H$. אזי

$$\begin{aligned}((g_1,h_1)(g_2,h_2))(g_3,h_3) &= (g_1g_2,h_1h_2)(g_3,h_3) = (g_1g_2g_3,h_1h_2h_3)\\ &= (g_1,h_1)(g_2g_3,h_2h_3) = (g_1,h_1)((g_2,h_2)(g_3,h_3))\end{aligned}$$

כי הפעולות ב-G וב-H הן קיבוציות. איבר היחידה הוא $e_{G\times H} = (e_G,e_H)$, ואכן

$$(g,h)(e_G,e_H) = (ge_G,he_G) = (g,h) = (e_Gg,e_Hh) = (e_G,e_H)(g,h)$$

לכל איבר $(g,h) \in G \times H$. ההופכי שלו הוא $\left(g^{-1},h^{-1}\right)$ מפני ש-

$$(g,h)\left(g^{-1},h^{-1}\right) = \left(gg^{-1},hh^{-1}\right) = (e_G,e_H) = \left(g^{-1}g,h^{-1}h\right) = \left(g^{-1},h^{-1}\right)(g,h)$$

ב. הוכחה. אם $G \times H$ אבלית, אזי לכל $(g_1,h_1),(g_2,h_2) \in G \times H$ מתקיים

$$(g_1g_2,h_1h_2) = (g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_2,h_2)(g_1,h_1) = (g_2g_1,h_2h_1)$$

ובפרט לכל $g_1,g_2 \in G$ ולכל $h_1,h_2 \in H$ מתקיים $g_1g_2 = g_2g_1$ ו-$h_1h_2 = h_2h_1$, שזו בדיוק ההגדרה לכך ש-G,H אבליות.
אם G,H אבליות, אז נחזור על הטיעון בכיוון השני.

שאלה 4. תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a,b \in G$ מתקיים כי $(ab)^2 = a^2b^2$.

פתרון. לכל זוג איברים $a,b \in G$ מתקיים $(ab)^2 = abab = aabb = a^2b^2$. נכפיל משמאל ב-$a^{-1}$ ומימין ב-b^{-1} ונקבל

$$a^{-1}ababb^{-1} = ba = ab = a^{-1}aabbb^{-1}$$

כלומר $ba = ab$.

שאלה 5. תהי $G = \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ חבורה אבלית סופית. נסמן $b = a_1a_2\cdots a_n$ מכפלת כל איברי G. הוכיחו כי $b^2 = e$. רשות: מצאו קריטריון מתי $b = e$.

פתרון. כיוון ש-G אבלית, לא משנה סדר המכפלה של האיברים ב-b^2. נשים לב שב-b^2 כל איבר בחבורה מופיע פעמיים. נסדר את המכפלות כך של איבר יהיה ליד ההופכי שלו $b^2 = a_1a_1^{-1}a_2a_2^{-1}\cdots a_na_n^{-1}$. אז קל לראות כי $b^2 = e_G$.

בהצלחה!