פתרון מועד א' בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

קורס מס' 83114 תשע"ז, סמסטר קיץ

שאלה 1.

א. קבע עבור אילו ערכי α הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}$ מתכנס (10 נק').

ב. הצג את תוצאת האינטגרל $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ כסכום של מספרים רציונליים בדיוק של 10^{-9} (15 נק').

פתרון:

א. ניעזר במבחן ההשוואה הגבולי. נשווה את האיבר הכללי של הטור שלנו ל- $\frac{1}{n^{\beta}}$:

$$\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}}{\frac{1}{n^{\beta}}}=n^{\beta}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^{\alpha}}=\frac{n^{\beta}}{n^{\alpha/2}\left(\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1}\right)^{\alpha}}$$

ונשים לב שהגבול של הביטוי שקיבלנו כאשר $n\to\infty$ הוא מספר סופי וגדול מאפס כאשר $\beta=\alpha/2$.

מכאן שהטור שלנו הוא "חבר" של הטור $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha/2}}$ שמתכנס אם"ם $\alpha/2>1$, כלומר אם"ם $\alpha>2$.

ב. פיתוח $\sin x$ לטור מקלורן הוא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$ ומכאן נקבל: $\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n}$. לטור החזקות הזה יש ר"ה אינסופי, לכן הוא מתכנס במ"ש בכל קטע סגור (משפט) ומכאן שניתן לרשום:

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!\cdot(2n+1)}.$$

זהו טור רציונלי שהוא גם טור לייבניץ, לכן מתקיים עבור השארית שלו: $r_n<\frac{1}{(2n+3)!\cdot(2n+3)}$. בפרט

$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ שווה ל- $\sum_{n=0}^{5}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!\cdot(2n+1)}=1-\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{5!\cdot 5}-\frac{1}{7!\cdot 7}+\frac{1}{9!\cdot 9}-\frac{1}{11!\cdot 11}$ בדיוק של 10^{-9}.

שאלה 2.

א. ידוע כי הפונקציה $z=f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $P=(x_0,y_0)$, ושהנגזרות המכוונות שלה בשני כיוונים (לא מקבילים) $\widehat{h_1},\widehat{h_2}$ מתאפסות. הראה כי P היא נקודה קריטית של f.

ב. מצא משוואת מישור המשיק למשטח: $x^2+y^2+z^2=2z$ ומאונך למישורים: $z=x+y,\ z-y=\frac{x}{2}$.

פתרון:

א. $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה P לכן הנגזרות המכוונות שלה בנקודה זו בכיוונים $\widehat{h_1},\widehat{h_2}$ הם: $\nabla f_{(P)}\bullet\widehat{h_1}=\nabla f_{(P)}\bullet\widehat{h_2}=0$ (משפט), כלומר $\nabla f_{(P)}$ ניצב לשני הוקטורים $\widehat{h_1},\widehat{h_2}$. אבל אלו לא מקבילים, לכן ב- $\mathbb{R}^2$ המשמעות היא בהכרח: $\nabla f_{(P)}=\overline{0}$.

ב. הנורמל למשטח: $\vec{n}=(x,y,z-1)$ אמור להיות מאונך לווקטורים: $(1,2,-2),(1,1,-1)$.

מתוך המכפלות הסקלריות מתקבלת מערכת משוואות: $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x+2y-2z=-2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z-1 \end{cases}$.

נציב זאת במשטח ונקבל: $(z-1)^2+z^2=2z$ ומכאן את נקודות ההשקה: $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. הנורמל למשטח בנקודה הראשונה למשל הוא: $\vec{n}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\|(0,1,1)$

ולכן המישור המשיק שם הוא: $y+z+D=0 \Rightarrow D=-1-\sqrt{2}$ כלומר: $y+z=1+\sqrt{2}$.

שאלה 3.

א. יהא ריבוע בעל צלע a וקודקוד A. נניח שבריבוע זה קיימת צפיפות מסה הפרופורציונלית בכל נקודה למרחק הנקודה מ-A בריבוע. במרכז הריבוע המסה היא P_0. חשב את המסה הכללית של הריבוע.

ב. מצא את הנקודה על מעגל היחידה הקרובה ביותר לנקודה $(3,1)$. נמק !

פתרון:

א. נמקם שתיים מפאות הריבוע על הצירים כך ש-A ימוקם בראשית. צפיפות המסה היא מהצורה:

$\rho(x,y)=k\left(x^2+y^2\right)$. נתון: $\rho\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)=\frac{ka^2}{2}=P_0 \Rightarrow k=\frac{2P_0}{a^2}$ לכן: $\rho(x,y)=\frac{2P_0}{a^2}\left(x^2+y^2\right)$.

נקבל: $M=\iint_D \rho(x,y)dD=\frac{2P_0}{a^2}\int_0^a dx\int_0^a\left(x^2+y^2\right)dy=\frac{2P_0}{a^2}\int_0^a\left(x^2a+\frac{a^3}{3}\right)dx=\frac{4P_0a^2}{3}$.

ב. צריך למצוא נקודת מינימום מוחלט של הפונקציה $f(x,y)=(x-3)^2+(y-1)^2$ תחת האילוץ

$x^2+y^2=1$. נחפש נקודות קריטיות של פונקצית לגרנז': $L=(x-3)^2+(y-1)^2+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$:

$$\left.\begin{cases} \left.\begin{aligned} L_x=2(x-3)+2\lambda x=0 \\ L_y=2(y-1)+2\lambda y=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda=\frac{3}{x}-1=\frac{1}{y}-1 \Rightarrow x=3y \\ L_\lambda=x^2+y^2-1=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow 10y^2=1 \Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

קיבלנו שתי נקודות חשודות: $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$. לפי משפט ווירשטראס 2 כיוון שהאילוץ הוא תחום קומפקטי והפונקציה f היא רציפה בו, חייבת להיות לה נקודת מינימום גלובלית שם. אך כיוון שלמעגל היחידה אין שפה (עקום סגור), זו חייבת להיות גם נקודת קיצון מקומי. כמו כן הפונקציה היא דיפרנציאבילית לאורך המעגל, לכן לפי משפט קיצון מותנה זו חייבת להיות נקודה קריטית. מכאן שמספיק לעמת בין שתי הנקודות הקריטיות שקיבלנו כדי לקבל את המינימום, וזו תהיה $\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

שאלה 4. נתון שדה וקטורי: $F=\dfrac{(-y,x)}{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}$ ועקום: $L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, y\ge 0$ בין $(2,0)$ ל- $(-2,0)$.

א. חשב את $\int_L F\bullet dr$.

ב. הראה כי F הוא שדה משמר בתחום $D=\left\{1\le x^2+y^2\le 100, y\ge 0\right\}$. נמק !

ג. תהא U פונקצית הפוטנציאל של F בתחום D ונתון כי: $U(2,0)=1$ חשב את $U(-2,0)$.

פתרון:

א. ניעזר בפרמטריזציה: $r(t)=(x=2\cos t, y=3\sin t)$ עבור $0\le t\le \pi$ ומכאן:

$dr=r'(t)dt=(-2\sin t,3\cos t)dt$. השדה מתפרש כעת כ: $F=(-3\sin t,2\cos t)$. נקבל:

$$\oint_L F\bullet dr=\int_0^{\pi}(-3\sin t,2\cos t)\bullet(-2\sin t,3\cos t)dt=\int_0^{\pi}\left(6\sin^2 t+6\cos^2 t\right)dt=6\pi.$$

ב. נשים לב כי התבנית היא סגורה:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-x\cdot\frac{x}{2}}{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2}=\frac{\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}}{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+y\cdot\frac{2y}{9}}{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2}=\frac{\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}}{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2}$$

והתחום D הוא פשוט קשר, לכן התבנית היא גם מדויקת שם, כלומר השדה הוא משמר שם.

ג. כיוון שהשדה הוא משמר מתקיים: $6\pi=\int_L F\bullet dr=U(-2,0)-U(2,0)$ ומכאן ש: $U(-2,0)=1+6\pi$.

שאלה 5.

א. הראה כי בהינתן תחום D במישור x,y בעל שפה בכיוון החיובי L, השטח של D ניתן לחישוב ע"י:

$$|D|=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx \quad \text{(10 נק')}.$$

ב. חשב את שטף השדה $F=\left(x^3,y^3,z^3\right)$ דרך המעטפת של כדור ברדיוס a שמרכזו בראשית (15 נק').

פתרון:

א. זו תוצאה ישירה של משפט גרין עבור השדה $F=(-y,x)$:

$$\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\oint_L F\bullet dr=\frac{1}{2}\iint_D\underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=2}dxdy=\iint_D dxdy=|D|.$$

ב. ניעזר במשפט גאוס: $divF=3\left(x^2+y^2+z^2\right)=3r^2$ ולכן ע"י מעבר לקורדינטות כדוריות נקבל:

$$\oiint_S F\bullet\hat{n}\,dS=3\iiint_V r^2dV=3\cdot 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^a r^2\underbrace{r^2\sin\varphi}_{J}dr=12\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}\frac{a^5}{5}=\frac{12\pi a^5}{5}.$$