חשבון אינפי 1 - פתרון שאלות פתוחות

שבוע 10

סמסטר א', 2015-2016

1 מבוא לפונקציות ליפשיץ

טענה 1.1 תהי $f: A \to B$ כך ש $f \in \mathrm{Lip}\left(L\right)$ אזי $f \in C\left(A\right)$ (היא רציפה בA).

הוכחה: ניקח $x_0 \in \mathrm{Dom}\left(f\right)$ ונראה שf רציפה בו. יהי $\varepsilon > 0$ נתון. נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ אזי אם $\left|x - x_0\right| < \delta$ נובע מהיותה של הפונקציה ליפשיץ

$$\left|f\left(x\right) - f\left(x_0\right)\right| \leq L\left|x - x_0\right| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

(המעבר השני נובע מאחר שאנחנו בδ סביבה של x_0). לפי הגדרת הגבול לפי Cauchy ינבע כי הפונקציה רציפה בכל נקודה בקבוצה עליה היא מוגדרת. ■

טענה 1.2 תהי[1] $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש$f \in \mathrm{Lip}\left(L\right)$ עבור $L \in \left(0,1\right)$. נבחר $x_0 \in A$ ונגדיר סדרה באופן הבא:

$$x_n = \begin{cases} x_0 & n = 0 \\ f\left(x_{n-1}\right) & n \neq 0 \end{cases}$$

אזי הסדרה מתכנסת וגבולה מקיים

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right)$$

הוכחה: קל לראות כי

$$\left|x_{n+2} - x_{n+1}\right| = \left|f\left(x_{n+1}\right) - f\left(x_n\right)\right| \leq L\left|x_{n+1} - x_n\right|, \quad \left(n \in \mathbb{N}\right)$$

ובאינדוקציה (בדקו!)

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| \leq L^{n-1}\left|x_1 - x_0\right|, \quad \left(n \in \mathbb{N}\right)$$

[1] במקרה שכזה נהוג לומר כי מדובר בהעתקה מכווצת, contraction.

נראה תחילה <u>את ההתכנסות:</u> נעשה זאת עם סדרות קושי. יהי $\varepsilon > 0$ נתון, אזי לכל $m > n > 1 \in \mathbb{N}$ מתקים לפי אי"ש המשולש:

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m}(x_k - x_{k-1})\right| \\ &\le |x_m - x_{m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\le \left(L^{m-1} + \cdots + L^n\right)|x_1 - x_0| \\ &= L^n\left(L^{m-n-1} + \cdots + 1\right)|x_1 - x_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

לכן זו סדרת קושי והיא מתכנסת. נשאיף את $n \to \infty$ בביטוי $x_n = f(x_{n-1})$ ואזי מהרציפות שהראנו בטענה 1.1:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)}$$

■

2 בנייות מעניינות עם פונקציות (אי) רציפות

טענה 2.1 קיימת פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקבלת כל ערך על הישר הממשי מספר זוגי של פעמים.

הוכחה: נבנה פונקציה המקבלת כל ערך אי שלילי מספר זוגי של פעמים וכל ערך שלילי איננה מקבלת כלל (ולכן מקבלת אותו אפס פעמים בעצם). כפי שציינו בהדרכה מספיק להגדיר בנפרד את f על חצי המישור הימני והשמאלי בנפרד:

- על $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\}$ ניתן להגדיר

$$f_1(x) = -x$$

ואכן כל ערך אי שלילי מתקבל בדיוק פעם אחת וכל ערך שלילי אפס פעמים.

- על $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ נגדיר את הפונקציה על $(0,1]$ ואז <u>נמשיך אותה באופן מחזורי</u> ע"י הנוסחה $f(x+n) = f(x) + n$. נגדיר $f_2 : (0,1] \to \mathbb{R}$ ע"י

$$f_2(x) = \begin{cases} 3x & x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \\ -3x + 2 & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ 3x - 2 & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

אם נסכם:

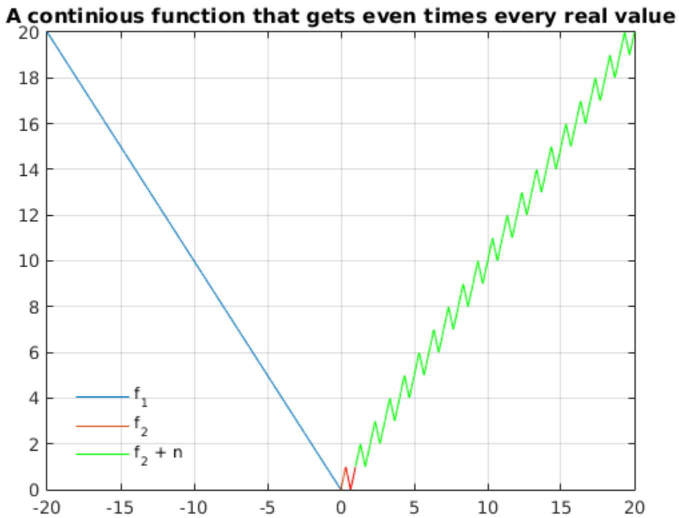
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \le 0 \\ f_2(x) & x \in (0,1] \\ f_2(\{x\}) + \lfloor x \rfloor & x > 1 \end{cases}$$

הפונקציה שלנו היא רציפה (בדקו!) ואכן הפונקציה מקבלת את הערך 0 בדיוק פעמיים (פעם אחת ב־$\mathbb{R}^-$ ופעם אחת ב־$\mathbb{R}^+$) ואילו את כל יתר הערכים האי שליליים היא מקבלת פעם אחת ב־$\mathbb{R}^-$ ושלוש פעמים ב־$\mathbb{R}^+$, כלומר ניתן לסכם[2]

$$\#\left\{f^{-1}(x)\right\} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 4 & x > 0 \end{cases}$$

[2] הסימון # הוא סימון נוסף של עוצמה. השתמשנו בו כאן כדי שלא תתבלבלו עם ערך מוחלט.

ואמנם פונקציה זו עונה לכל התנאים. נשרטט אותה:



■

טענה 2.2 קיימת פונקציה $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ כך שעל כל תת קטע עוצמת אי הרציפויות וגם עוצמת הרציפויות גדולה מ$\aleph_0$.

הוכחה: נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n+1} & \text{אם הפיתוח הטרינארי של } x \text{ מכיל } n \text{ אחדים היכן ש } n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\\ 0 & \text{אם הפיתוח הטרינארי של } x \text{ מכיל מספר אינסופי של אחדים}\end{cases}$$

הערה 2.3 שימו לב שמאחר שהפיתוח הטרינארי לא יחיד, אנחנו הולכים להניח כי הפונקציה מתייחסת לפיתוח הטרינרי <u>המינימלי</u> של כל נקודה. לדוגמה קל לראות

$$\frac{2}{3}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3^k}$$

ולפיכך

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3^k}\right)=\frac{1}{1+0}=1.$$

מהן נקודות הרציפות שלה? בדיוק אלו שבפיתוח הטרינארי שלהן יש אינסוף פעמים 1. תהי נקודה $x_0\in(0,1)$ שבפיתוח שלה יש אינסוף פעמים את הספרה 1. ניקח $x_n\to x_0$ כנ"ל. אזי או שלכל n בפיתוח של x_n ישנו מספר אינסופי של אחדים (אז הטענה ברורה כבתור התכנסות של סדרה קבועה של אפסים) או שמספר האחדים (שנסמן $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$) הוא סדרה מונוטונית לא יורדת לא חסומה ביחס לn, אינדקס הסדרה. מכאן ש

$$0\le\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_n+1}=0=f(x_0).$$

מנגד, שימו לב שבכל נקודה $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\in(0,1)$ ($a_n\in\{0,1,2\}$) שמספר האחדים בפיתוח שלה הוא סופי (נניח נסמנו $N\in\mathbb{N}$), ניתן לבנות את הסדרה הבאה:

$$y_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j}{3^j}+\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{1}{3^j}.$$

שימו לב כי הטור הימני אכן שואף ל־0 כאשר $k\to\infty$ כבתור זנב של טור גאומטרי מתכנס ומנגד הטור הימני שואף לy ולכן $y_k\to y$. מנגד, מספר האחדים בכ"א מהy_kשלנו הוא אינסופי ומכאן

$$f\left(y_k\right)=0$$

וברור אם כך,

$$\lim_{k\to\infty}f\left(y_k\right)=\lim_{k\to\infty}0\neq\frac{1}{N+1}=f\left(y\right)$$

שימו לב שאם היינו לוקחים עבור y הנ"ל סדרה אחרת (לדוגמה סדרה של מספרים $z_m\to y$ כך שלכל m יש בפיתוח של z_m בדיוק N אחדים) אזי

$$\lim_{m\to\infty}f\left(z_m\right)=\lim_{m}\frac{1}{N+1}=f\left(y\right)$$

ולפיכך נסיק כי מדובר באי רציפויות מסוג שני. מאחר שלכל נקודה ב־$(0,1)$ יש פיתוח טרינרי שכנ"ל המכיל אינסוף אחדים או מספר סופי של אחדים, אלו הן נקודות הרציפות והאי רציפות של הפונקציה על תחום הגדרתה. כעת נשים לב כי

$$|(0,1)|=\aleph$$

ומנגד, הקבוצה של המספרים שבמקומות הזוגיים בפיתוח יש 1 ובאחרים יש 0 או 2, כלומר

$$E=\left\{x\in(0,1)\,\middle|\,x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2j}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^{2j+1}},\quad a_k\in\{0,2\}\right\}$$

מוכלת בקבוצת הרציפויות שלנו (שנסמן C) ואזי

$$\aleph=2^{\aleph_0}=2^{|2\mathbb{N}|}=|E|\leq|C|\leq|(0,1)|=\aleph$$

$$\Rightarrow\boxed{|C|=\aleph}.$$

עוד נשים לב כי

$$F=\left\{x\in(0,1)\,\middle|\,x=\frac{1}{3}+\sum_{k\neq1}^{\infty}\frac{a_k}{3^{2j+1}},\quad a_k\in\{0,2\}\right\}$$

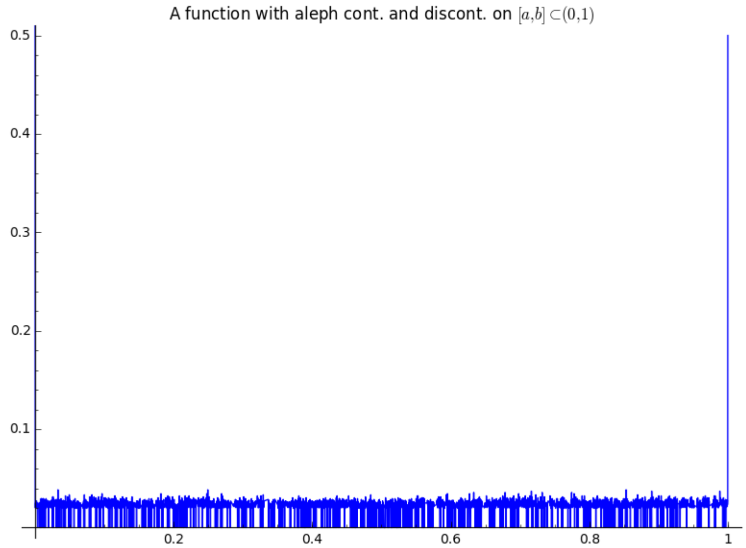
מוכלת בקבוצת האי רציפויות (שנסמן להיות D) ואזי בדומה

$$\aleph=2^{\aleph_0}=2^{|\mathbb{N}\setminus\{1\}|}=|F|\leq|D|\leq|(0,1)|=\aleph$$

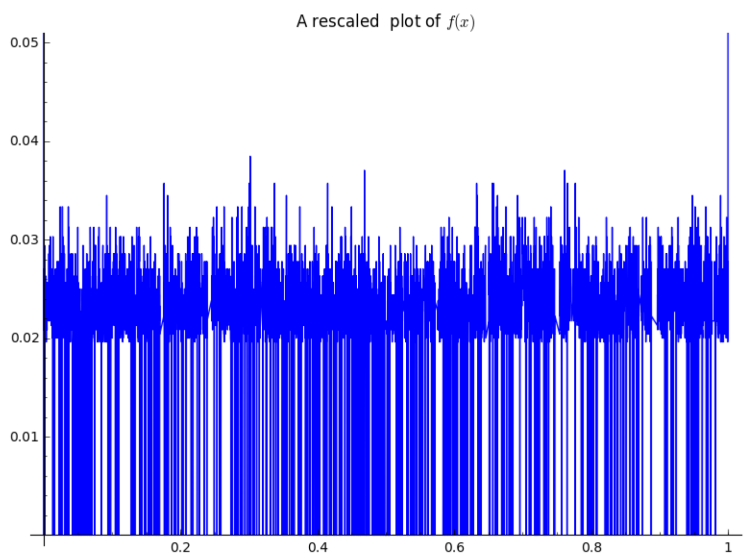
ואם נסכם,

$$\boxed{|C|=|D|=\aleph}.$$

הפונקציה תראה כך (בשגיאת עיגול של 3^{-51}):



או אם נתקרב:



■