

תרגיל 3 – אלגברה מופשטת

1. תהי G חבורה ויהי $a \in G$. הגדרנו $\langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\} \leq G$.

1.1 הוכיחו כי אם $o(a) = n$ אז $\langle a \rangle = \{1, a, \dots, a^{n-1}\}$ והאיברים $1, a, \dots, a^{n-1}$ שונים זה מזה.

1.2 הוכיחו כי (בכל מקרה) הסדר של a שווה לסדר של החבורה שהוא יוצר.

2. פתרו את המשוואה $(123)^2 x = (12)(132)^{-1}$.

3. ענו על הסעיפים הבאים.

3.1 הוכיחו שבחבורת הסימטריה S_n כל שני מחזורים זרים מתחלפים זה עם זה.

3.2 הוכיחו שאם α, β הם מחזורים זרים, אזי $ord(\alpha\beta) = lcm(ord(\alpha), ord(\beta))$.

3.3 תהי G חבורה ויהיו $a, b \in G$ איברים מתחלפים. נניח כי $o(a) = n, o(b) = m$ כאשר m, n מספרים זרים. הוכיחו כי $o(ab) = nm$.

4. ענו על הסעיפים הבאים.

4.1 בחבורה S_8 מצאו איברים מסדר 4, 7, 12, 15, 19, 20. אם אין איבר מסדר מסויים, הסבירו מדוע.

4.2 הוכיחו שהמחזורים $(12345), (13524) \in S_6$ מתחלפים, על אף שאינם זרים.

5. ענו על הסעיפים הבאים.

5.1 כתבו את לוח הכפל של החבורה הדיהדרלית D_3 .

5.2 תהי $H = \langle (14), (13) \rangle$ תת חבורה של S_4 . רשמו את לוח הכפל שלה והוכיחו שהיא איזומורפית ל D_3 . כתבו את האיזומורפיזם בצורה מפורשת.

6. ענו על הסעיפים הבאים:

6.1 הוכיחו שחבורת קליין, כלומר תת חבורה של S_4 המוגדרת על-ידי
 $V = K_4 = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$, איזומורפית ל U_8 .

6.2 רשמו את איברי תת החבורה של S_6 הנוצרת על ידי שני האיברים
 $(145)(263), (15)(36)$.

7. תהי G חבורה ו $H \subseteq G$ תת קבוצה לא ריקה הסגורה לכפל.

7.1 הוכיחו כי אם H סופית אז $H \leq G$.

7.2 האם סעיף 7.1 נכון בהינתן כי H אינסופית?

בהצלחה! 😊