פתרון לדוגמה לתרגיל בלקט

8 בנובמבר 2015

בתרגול נתתי לכם לנסות לפתור בבית את השאלה הבאה:

תרגיל 2.6.1

תהי $a_n \to L$ אי שלילית אז מתקיים $\sqrt{a_n} \to \sqrt{L}$. (רמז: פצלו למקרה (הקל) בו $L = 0$ ולמקרה בו $L \neq 0$).

- מאחר שאף אחד לא פנה אלי לאורך השבוע הנחתי שכולם פתרו את התרגיל. הנה הפתרון שלי למקרה שרציתם להשוות. אין כאן טיוטות וכד' כמו שעשיתי בתרגול אלא פתרון פורמלי גרידא. **זה פתרון שאתם בהחלט יכולים לתייק ולהגיש במבחן/בוחן** (אולי זה רמז?)

פתרון

נפצל למקרים: יהי $\varepsilon > 0$ נתון.

1. אם $L = 0$: מהנתון $a_n \to L$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$,

$$|a_n| < \epsilon^2$$

ואולם נובע מיידית ש

$$|\sqrt{a_n}| = \sqrt{a_n} < \epsilon$$

כדרוש.

2. אם $L \neq 0$: קיים $n_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_1$

$$|a_n - L| < \sqrt{L}\epsilon$$

אולם כפי שחלקכם אמרתם בתרגול:

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right)\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{L}\right)}{\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{L}\right)}\right| = \frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} \leq \frac{|a_n - L|}{\sqrt{L}} < \frac{\sqrt{L}\varepsilon}{\sqrt{L}} = \epsilon$$

זה מוכיח את הדרוש. $\square$

הערה

את שאלה 2.4, שגם אותה קיבלתם בתרגול אתן לכם לפתור לבד. מי שלא יצליח מוזמן לבוא לשמוע את הפתרון בשעת הקבלה.