**שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית (88-526)**
**שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ**
**סמסטר א', מועד ב': י"ב באדר תש"ע (26.2.2010)**
**יש לנמק את כל התשובות.**
**משך הבחינה: שעתיים וחצי.**

1. תהי $\gamma$ עקומת מהירות יחידה במישור ($xz$).
יהי $\underline{x}$ משטח סיבוב הנוצר על-ידי סיבוב העקומה סביב לציר - $z$.
   א. מצא שטח של משטח באמצעות פונקציה $f$ כאשר $f(u)$ הוא מרחק של $\gamma(u)$ לציר $z$.
   ב. אם $\gamma$ הוא מעגל ברדיוס $b>0$, מרחק בין מרכז המעגל לציר - $z$ הוא $a>0$ כאשר $a>b$, מצא שטח של המשטח הנוצר.
2. נניח שפרמטריזציה של משטח מקיימת $g_{12}=L_{12}=0$.
   א. נגדיר עקמומיות ראשיות $k_1$ וגם- $k_2$.
   ב. בחר בסיס מתאים ובטא העתקת Weingarten על ידי מטריצה.
   ג. בטא מנה $k_1/k_2$ לגבי משטח המתקבל כפונקציה של מקדמים של תבניות ראשונה ושניה.
   ד. חשב מנה $k_1/k_2$ באמצעות סיבוב של פרבולה $x=z^2+\frac{1}{4}$ מסביב לציר - $z$.
3. בקואורדינטות $(u^1,u^2)=(x,y)$, נניח $f(x,y)=\frac{12}{y}$. ונתבונן במטריקה $f(x,y)^2\left(dx^2+dy^2\right)$.
   א. חשב את המקדם $\Gamma_{22}^2$ של המטריקה.
   ב. הגדר אופרטור Laplace-Beltrami $\Delta_{LB}$.
   ג. תנו נוסחה לעקמומיות של Gauss באמצעות אופרטור $\Delta_{LB}$.
   ד. חשב את $K=K(x,y)$ של המטריקה.

4.
   א. הוכח את הנוסחה ל $\Gamma_{ij}^k$ באמצעות $g_{ij}$.
   ב. הוכח שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^x}\left(\Gamma_{ij}^l x_l+L_{ij}n\right)$ סימטרי ב- $j$ ו- $k$.
   ג. הסבר היחס בין מקדמים $L_{ij}$ לבין $L^k{}_l$.
   ד. בטא $L_{i[j}L^k{}_{l]}$ באמצעות מקדמים של מטריקה.

5. יהי טורוס $T^2$ ב- $\mathbf{R}^3$ עם פרמטריזציה
$\underline{x}(\theta,\varphi)=\left((5+2\cos\varphi)\cos\theta,(5+2\cos\varphi)\sin\theta,2\sin\varphi\right)$.
   א. מצא אורך של $\theta$-לולאה ושל $\varphi$-לולאה.
   ב. הגדר פרמטר קונפורמי $\tau$ של הטורוס.
   ג. מצא פרמטר קונפורמי $\tau=\tau\left(T^2\right)$ באמצעות אינטגרל.

# בהצלחה!