# התמרות אינטגרליות

## מרצה: פרופסור לאוניד שוסטר

הוקלד ע"י ליאורה גירז'מן ורון גרשינסקי

## ***הרצאה 5:סינוס וקוסינוס התמרת פורייה***

## **1.התמרת פורייה של פונקציות הנתונות בחצי-ציר**

נכיר את הצורה הממשית של התוצאה העיקרית שלנו (ראה הרצאה 3,פרק 4,משפט4.1)

***משפט 1.1:***

תהי $f \in L_1(R)$ ומתקיימים התנאים הבאים:

1. הפונקציה $f(\cdot)$ מקיימת את תנאי הולדר מסדר $\alpha_1 \in (0,1]$ מימין בנקודה נתונה $x$.
2. הפונקציה $f(\cdot)$ מקיימת את תנאי הולדר מסדר $\alpha_2 \in (0,1]$ משמאל בנקודה נתונה $x$.

אז מתקיים השוויון (הנוסחא האינטגרלית של קושי):

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt\right]d\sigma, \quad x\in R \quad (1.1)$$

מכאן ואילך (לקיצור הניסוח) נשתמש (בטענה חלש יותר) במסקנה ממשפט 1.1.

***מסקנה 1.2 (הרצאה 3, פרק 4, מסקנה 4.2):***

אם $f \in L_1(R)$ ובנוסף הפונקציה $f$ הינה חלקה למקוטעין בכל הציר $R$, אז הנוסחא האינטגרלית של פורייה בצורה הממשית (ראה 1.1) מתקיימת לכל $x \in R$.

מהמסקנה נובעת בקלות הטענה העיקרית הבאה:

***משפט 1.3:***

אם $f \in L_1(R)$ ובנוסף הפונקציה $f$ הינה חלקה למקוטעין בכל הציר $R$, אזי מתקיימות הטענות 1-2:

1. אם בנוסף לנתון לעיל, הפונקציה הינה זוגית: $f(x)=f(-x), \quad \forall x \in R$ אזי מתקיים הפיתוח הבא של הפונקציה הזוגית $f(\cdot)$ לאינטגרל פורייה:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(t)\cos\sigma t dt\right]\cos\sigma x d\sigma, \quad x\in R \quad (1.2)$$

2. אם בנוסף לנתון לעיל, הפונקציה הינה אי זוגית: $f(x)=-f(-x), \quad \forall x \in R$ אזי מתקיים הפיתוח הבא של הפונקציה האי זוגית $f(\cdot)$ לאינטגרל פורייה:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(t)\sin\sigma t dt\right]\sin\sigma x d\sigma, \quad x\in R \quad (1.3)$$

***הוכחה:***

נוכיח את (1.2) (את שוויון (1.3) מוכיחים באופן דומה).

מתנאי המשפט נובע שמתקיימת הנוסחא (1.1):

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x) dt\right]d\sigma, \quad x\in R \quad (1.1)$$

מזוגיות הפונקציה $f(\cdot)$ נובע:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt = \cos\sigma x\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma t dt + \sin\sigma x\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\sigma t dt =$$

$$= \begin{bmatrix} f(t)\cos\sigma t - even\ function \\ f(t)\sin\sigma t - odd\ \ function \end{bmatrix} = 2\cos\sigma x\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\sigma t dt + \sin\sigma x\cdot 0 =$$

$$= 2\cos\sigma x\cdot\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\sigma t dt$$

נציב ב(1.1) ונקבל את (1.2). מש"ל.

***<u>הערות:</u>***

**1.** פונקציות הנתונות בחצי ציר אחד, לדוגמא ב $[0,\infty)$ - ניתן להשלים/להמשיך לחצי ציר השני $(-\infty,0)$ באופן כלשהו. לפיכך, נצטרך להשתמש בנוסחא הכללית של אינטגרל פורייה, נשתמש בנוסחאות הפשוטות יותר (עבור המשך של הפונקציה באופן זוגי או אי זוגי) בשביל חישוב יותר קל

$$\left(\begin{aligned} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\sigma(t-x)dt\right]d\sigma \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\sigma t dt\right]\cos\sigma x d\sigma \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\sigma t dt\right]\sin\sigma x d\sigma \end{aligned}\right)$$

**2.** חשוב לציין, שעבור המשכה זוגית או אי זוגית באינטגרל פורייה עצמו (1) ניתן להגביל את החקירה לחצי האינטרוול של ערכי X שעבורם מוגדרת הפונקציה המקורית. (כלומר אם נמשיך את הפונקציה בצורה אחרת – לא בצורה "זוגית" או "אי זוגית" אז לא נוכל להשתמש 2 הנוסחאות האחרונות בסוגריים, אלא בראשונה,

שבה האינטגרל הפנימי הוא על כל הציר, לעומת זאת בנוסחאות האחרונות אנו משתמשים רק בחצי הציר שבו הפונקציה המקורית מוגדרת)

**3.** אם אצלנו ההמשכה היא זוגית, אז $f(+0)=f(-0)$ ולכן פיתוח הפונקציה (בנקודה $x=0$) לאינטגרל פורייה, ניתן לכתיבה כך:

$$f(+0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\cos\sigma t dt\right]d\sigma$$

**4.** אם הפונקציה לא שווה לאפס עבור $x=0$, ואנו בוחרים להמשיך אותה באופן אי זוגי אז בנקודה $x=0$ צריך להגדירה מחדש: $f(0)\overset{def}{:=}0$. פיתוח לאינטגרל פורייה עבור $x=0$ יהיה: $0=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty 0 d\sigma$.

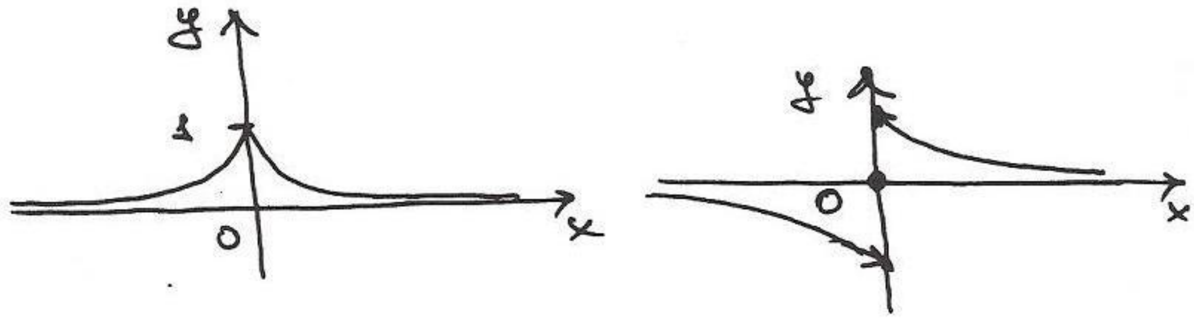
נשתמש במשפט 1.3 על מנת לפתור את הבעיה הבאה.

***בעיה:***

תהי הפונקציה $f(x)$ נתונה ב $[0,\infty)$. דרוש לפתח אותה לאינטגרל פורייה.

אנו יכולים לפתור את הבעיה ב2 דרכים שונות:

1. נמשיך את $f(x)$ מ$[0,\infty)$ ל$(-\infty,0)$ באופן זוגי, כלומר
$f(-x):=f(x),\ \forall x\in[0,\infty)$
2. נמשיך את $f(x)$ מ$[0,\infty)$ ל$(-\infty,0]$ באופן אי זוגי, כלומר
$f(-x):=-f(x),\ \forall x\in[0,\infty)$




(הגרף השמאלי – המשכה זוגית. הגרף הימני – המשכה אי זוגית, כך שמגדירים מחדש את הפונקציה בנקודה $x=0$ כך $f(0):=0$ )

אם בנוסף, הפונקציה המקורית מקיימת את ההכלה $f(x)\in L_1(R)$ והינה חלקה למקוטעין ב$[0,\infty)$, אזי ההשלמה שלה $f(x)$ (בכל אופן שהוא) שייכת ל$L_1(R)$ והינה פונקציה חלקה למקוטעין בכל הציר $\Leftarrow$ ניתן להפעיל על $f(x)$ את משפט 1.3 ולקבל פיתוח לאינטגרל פורייה של $f(x)$ , ולכן גם עבור $f(x)$ (ראה הערות).

***תרגיל:***

פתח את הפונקציה $f(x)=e^{-x},\ x\in(0,\infty)$ לאינטגרל פורייה, כאשר ההמשך נעשה: $(a)$באופן זוגי $(b)$באופן אי זוגי

***פתרון:***

$(a)$תהי $f(x)$ השלמה זוגית של $f(x)=e^{-x}, x>0$ ב$(-\infty,0)$

$\Leftarrow f(x)=e^{-|x|}, x\in R$ . ברור ש$f\in L_1(R)$ ו $f\in L_1(R)$ פונקציה חלקה למקוטעין ב$R$ $\Leftarrow$ כיוון ש$f(x)$ פונקציה רציפה אזי:

$$\Leftarrow\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-t}\cos\sigma t dt\right]\cos\sigma x d\sigma$$

נחשב את האינטגרל הפנימי:

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos\sigma t dt = -\int_0^\infty \cos\sigma t de^{-t} = -e^{-t}\cos\sigma t\Big|_0^\infty - \sigma\int_0^\infty (\sin\sigma t) e^{-t} dt =$$

$$= 1 + \sigma\int_0^\infty \sin\sigma t de^{-t} = 1 + \underbrace{\sigma(\sin\sigma t) e^{-t}\Big|_0^\infty}_{=0} - \sigma^2\int_0^\infty (\cos\sigma t) e^{-t} dt \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty e^{-t}\cos\sigma t dt = \frac{1}{1+\sigma^2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\sigma t}{1+\sigma^2} d\sigma \Rightarrow \boxed{e^{-|x|} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\sigma t}{1+\sigma^2} d\sigma}$$

$(b)$ תהי $f(x)$ השלמה אי זוגית של $f(x) = e^{-x}, x > 0$ ב $(-\infty, 0)$

$\Leftarrow f(x) = e^{-|x|}\cdot \operatorname{sign} x$ . ברור ש $f \in L_1(R)$ ו $f \in L_1(R)$ פונקציה חלקה

למקוטעין ב $R$ $\Leftarrow$ כיוון ש $f(x)$ פונקציה רציפה בכל מקום, פרט לנקודה $x = 0$ , אזי:

$$\Leftarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\sigma x\left[\int_0^\infty e^{-t}\sin\sigma t dt\right] d\sigma$$

נחשב את האינטגרל הפנימי:

$$\int_0^\infty e^{-t}\sin\sigma t dt = -\int_0^\infty \sin\sigma t de^{-t} = -\underbrace{e^{-t}\sin\sigma t\Big|_0^\infty}_{=0} + \sigma\int_0^\infty (\cos\sigma t) e^{-t}dt =$$

$$= -\sigma\int_0^\infty \cos\sigma t de^{-t} = -\sigma e^{-t}\cos\sigma t\Big|_0^\infty - \sigma^2\cdot\int_0^\infty e^{-t}\sin\sigma t dt =$$

$$= \sigma - \sigma^2\int_0^\infty e^{-t}\sin\sigma t dt \Rightarrow \int_0^\infty e^{-t}\sin\sigma t dt = \frac{\sigma}{1+\sigma^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\operatorname{sign} x)e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma\sin\sigma x}{1+\sigma^2}d\sigma}$$

**הערה:**

נקבל, לדוגמא, בנוסחא זו:

$$x=1 \Rightarrow f(x)\Big|_{x=1} = e^{-x}\Big|_{x=1} = e^{-1} \Rightarrow$$

$$e^{-1} = f(x)\Big|_{x=1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma\sin\sigma x}{\sigma^2+1}d\sigma\Bigg|_{x=1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sigma\sin\sigma}{\sigma^2+1}d\sigma \Rightarrow$$

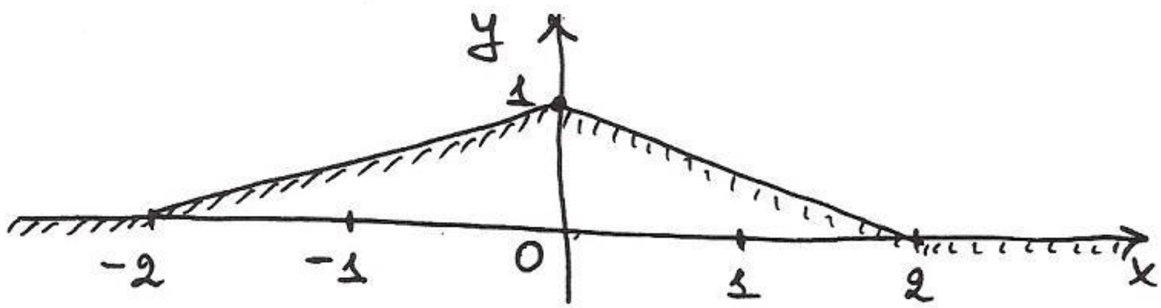
$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sigma\sin\sigma}{\sigma^2+1} = \frac{\pi}{2}e^{-1}}$$

**תרגיל:**

הצג את אינטגרל הפורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2}, & x\in[0,2]\\ 0 & ,x>2\end{cases}$

**פתרון:**

קודם כל נשים לב שהפונקציה $f(x)$ , $x\in[0,\infty)$ רציפה בנקודה $x=0$. לכן אנחנו בוחרים השלמה זוגית ל$(-\infty,0]$, כך ש$f(0)=1\neq 0$ (הפונקציה האי זוגית $\varphi(x)$ רציפה בנקודה $x=0$, אם $\varphi(0)=0$) $\Leftarrow$ $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{2}, & |x|\in[0,2]\\ 0 & ,|x|>2\end{cases}$




לכן, אם נמשיך את הפונקציה שלנו בחצי הציר $(-\infty,0]$ באופן זוגי, אז נקבל את הפונקציה $f(x)$ (ראה לעיל) עם הגרף הנתון. ברור ש:

1. $f(x)\in L_1(R)$ : $\|f\|_1=S_{\triangle}=\dfrac{4\cdot 1}{2}=2$

2. $f$ פונקציה חלקה למקוטעין

$\Leftarrow$ נפעיל משפט 1.3 (סעיף 1, כי הפונקציה $f(x)$ אי זוגית), הפונקציה $f(x)$ רציפה בכל מקום $\Leftarrow$

$$f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\sigma x\left[\int_0^\infty f(t)\cos\sigma t dt\right]d\sigma=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^2\left(1-\frac{t}{2}\right)\cos\sigma t dt\right]\cos\sigma x d\sigma$$

נחשב את האינטגרל הפנימי:

$$\int_0^2\left(1-\frac{t}{2}\right)\cos\sigma t dt=\left(1-\frac{t}{2}\right)\frac{\sin\sigma t}{\sigma}\Bigg|_0^2+\frac{1}{2\sigma}\int_0^2\sin\sigma t dt=$$

$$=-\frac{1}{2\sigma^2}\cos\sigma t\Bigg|_0^2=\frac{1-\cos 2\sigma}{2\sigma^2}=\begin{bmatrix}\cos 2\sigma=1-2\sin^2\sigma\\ \sin^2\sigma=\dfrac{1-\cos 2\sigma}{2}\end{bmatrix}=\frac{\sin^2\sigma}{\sigma^2}$$

נקבל את ההצגה המקורית:

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin^2\sigma}{\sigma^2}\cos\sigma x d\sigma,\quad x\in R}$$ בפרט, עבור $x=0$ , מתקיים

$$f(x)\Big|_{x=0}=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{2}, & |x|\le 2\\ 0, & |x|>2\end{cases}\Bigg|_{x=0}=1\Rightarrow$$

$$1=f(x)\Big|_{x=0}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin^2\sigma}{\sigma^2}\cos\sigma x d\sigma\Bigg|_{x=0}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin^2\sigma}{\sigma^2}d\sigma\Rightarrow$$

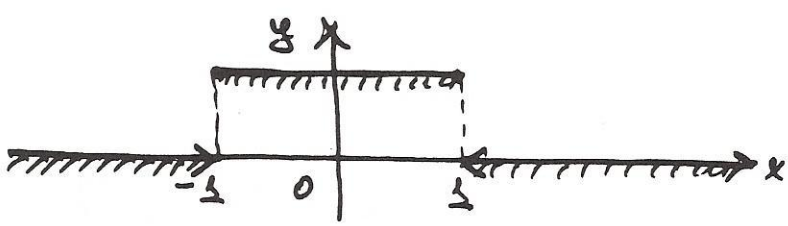
$$\boxed{\int_0^\infty\frac{\sin^2\sigma}{\sigma^2}d\sigma=\frac{\pi}{2}}$$

***תרגיל:***

פתח את אינטגרל הפורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & ,0\le x\le 1\\ 0 & ,x>1\end{cases}$ , כאשר ההמשכה שלה ל$(-\infty,0)$ הינה: $(a)$באופן זוגי. $(b)$באופן אי-זוגי.

***פתרון:***

$(a)$ נקבל $f(-x):=f(x),x\ge 0$ , $f(x)=f(x)$ עבור $x\ge 0$. הגרף של הפונקציה $f(x)$ , $x\in R$ הינו מהצורה:



$f(x)\in L_1(R)$ ו$f(x)$ חלקה למקוטעין ב$R$ $\Leftarrow$ ניתן להפעיל את משפט 1.3 (סעיף 1)

נרשום את אינטגרל הפורייה שלה:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\cos\sigma t dt\right]\cos\sigma x d\sigma$$ $\Leftarrow$ כיוון שאותנו

רק מעניינים $x\in(0,\infty)$ ו $x=0$ , אז עבור $x>0$ מתקיים $f(x)=f(x)$ $\Leftarrow$

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\cos\sigma t dt\right]\cos\sigma x d\sigma$$

נחשב את האינטגרל הפנימי:

$$\int_0^\infty f(t)\cos\sigma t dt = \int_0^1 \cos\sigma t dt = \begin{cases} \left.\dfrac{\sin\sigma t}{\sigma}\right|_0^1 & ,\sigma \neq 0 \\ 1 & ,\sigma = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sin\sigma}{\sigma} & ,\sigma \neq 0 \\ 1 & ,\sigma = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lim\limits_{\sigma\to 0}\dfrac{\sin\sigma}{\sigma} = 1 \\ \left.\dfrac{\sin\sigma}{\sigma}\right|_{\sigma=0} := 1 \end{bmatrix} = \frac{\sin\sigma}{\sigma}$$

אם $x \in [0,1) \cup (1,\infty)$ אזי הפונקציה $f(\cdot)$ בנקודה $x$ רציפה $\Leftarrow$ פיתוח הפונקציה המקורית:

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma}{\sigma}\cos\sigma x d\sigma}, x \geq 0, x \neq 1$$

אם $x = 1$, אזי $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2}$, והאינטגרל פורייה שווה ל:

$$\left.\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma}{\sigma}\cos\sigma x d\sigma\right|_{x=1} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma\cos\sigma}{\sigma}d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2\sigma}{2\sigma}d2\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin s}{s}ds = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$f(0) = 1$ לא שווה לערך האינטגרל פורייה (ששווה ל $\dfrac{1}{2}$).

$(b)$ כדי להמשיך את הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in[0,1]\\ 0 & ,x>1\end{cases}$ ל $(-\infty,0)$ באופן אי זוגי,

צריך לשנות את הערך הלא אפסי של הפונקציה בנקודה $x=0$.

מדוע? אם $f(x)$ המשך הפונקציה, אז

$f(-x)=-f(x), x>0 \Leftarrow f(-0)=-f(+0)$. אבל $f(x)$ רציפה מימין לאפס

ולכן $f(-0)=-f(+0)=-1 \Leftarrow f(+0)=f(+0)=f(0)=1$. כיוון ש

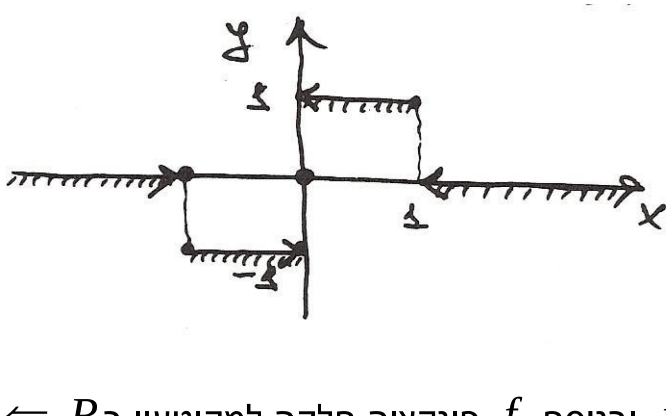
$f(x)$ פונקציה אי זוגית, אז לפי הגדרת הגרף שלה היא סימטרית ביחס לראשית

הצירים $f(0)=f(+0)=f(-0) \Leftarrow$ סתירה. לכן בנקודה $x=0$ מגדירים

את הפונקציה $f(x)$ מחדש: $f(x):=\begin{cases}1, x\in(0,1]\\ 0, x=0, x>1\end{cases} \quad \Leftarrow$

$$f(x):=\begin{cases}1 \;, \; x\in(0,1]\\ 0 \;, \; x=0,|x|>1\\ -1, \; x\in[-1,0)\end{cases}$$

כעת הגרף של $f(x)$ נראה כך:




ברור ש $f\in L_1(R)$ ובנוסף $f$ פונקציה חלקה למקוטעין ב$R \Leftarrow$ כיוון ש $f$ פונקציה אי זוגית, ניתן להשתמש במשפט 1.3 (סעיף 2):

כיוון שאותנו $\Leftarrow \quad \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt\right]\sin\sigma x d\sigma$

מעניינים רק $x>0$ ו $x=0$, אז עבור $x>0$ מתקיים $f(x)=f(x)$ $\Leftarrow$

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt\right]\sin\sigma x d\sigma$$

נחשב את האינטגרל הפנימי:

$$\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt=\int_0^1\sin\sigma t dt=\begin{cases}-\dfrac{\cos\sigma t}{\sigma}\Big|_0^1 & ,\sigma\neq 0\\ 0 & ,\sigma=0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sigma}{\sigma} & ,\sigma\neq 0\\ 0 & ,\sigma=0\end{cases}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\lim\limits_{\sigma\to 0}\dfrac{1-\cos\sigma}{\sigma}=\lim\limits_{\sigma\to 0}\sin\sigma=0\\ \Rightarrow\dfrac{1-\cos\sigma}{\sigma}\Big|_{\sigma=0}:=0\end{array}\right]=\frac{1-\cos\sigma}{\sigma}\Rightarrow$$

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos\sigma}{\sigma}\sin\sigma x d\sigma$$

כיוון שאם $x\neq 0$, $x\neq 1$, אז $f$ ו $f$ רציפות בנקודה $x$, אז נקבל את ההצגה המקורית:

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos\sigma}{\sigma}\sin\sigma x d\sigma x,\ x\in(0,1)\cup(1,\infty)}\quad(1.4)$$

עבור $x=1$ :

$$\left.\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|_{x=1}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}\neq f(1)=1$$

$$\left.\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos\sigma}{\sigma}\sin\sigma x d\sigma\right|_{x=1}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos\sigma}{\sigma}\sin\sigma d\sigma=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^\infty\frac{\sin\sigma}{\sigma}d\sigma-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin 2\sigma}{\sigma}d\sigma\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{1}{2}\qquad(1.5)$$

עבור $x=0$:

$$\frac{f(+0)+f(-0)}{2}=\frac{1-1}{2}=0$$

$$\left.\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos\sigma}{\sigma}\sin\sigma x d\sigma\right|_{x=0}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty 0 d\sigma=0=f(0)$$

***תרגיל:***

הוכח: $\int_0^\infty\frac{\sin^3 t}{t}dt=\frac{\pi}{4},\quad \int_0^\infty\frac{\sin^3 t}{t}\cos t dt=\frac{\pi}{16}$

***הוכחה:***

נשתמש ב(1.4), יהי $x=\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ $\Leftarrow$ נציב ב(1.4):

$$1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\sigma}{\sigma}\sin\frac{\sigma}{2}\,d\sigma =$$

$$\left[\left.\begin{array}{l}\cos\sigma = \cos^2\frac{\sigma}{2} - \sin^2\frac{\sigma}{2} \\ = 1 - 2\sin^2\frac{\sigma}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1-\cos\sigma}{2} = \sin^2\frac{\sigma}{2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\sin^2\frac{\sigma}{2}}{\sigma}\sin\frac{\sigma}{2}\,d\sigma = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^3\frac{\sigma}{2}}{\sigma}d\sigma = \begin{bmatrix}\sigma = 2t \\ d\sigma = 2dt \\ t \in [0,\infty)\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^3 t}{2t}2dt = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^3 t}{t}dt \Rightarrow 1 = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^3 t}{t}dt \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin^3 t}{t}dt = \frac{\pi}{4}}$$

עבור $x=1$ לפי נוסחא (1.5):

$$\frac{1}{2}=\frac{f(1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\sigma}{\sigma}\sin\sigma d\sigma=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\sin^2\sigma}{\sigma}\cdot 2\sin\frac{\sigma}{2}\cdot\cos\frac{\sigma}{2}d\sigma=\frac{8}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^3\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\sigma}{2}}{\sigma}d\sigma=$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma=2t\\ d\sigma=2dt\end{bmatrix}=\frac{8}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^3 t\cos t}{2t}2dt=\frac{8}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^3 t}{t}\cos tdt\Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{16}=\int_0^\infty \frac{\sin^3 t}{t}\cos tdt$$

## 2.סינוס וקוסינוס התמרת פורייה

***הגדרה 2.1:***

תהי $f\in L_1(0,\infty)$ . הפונקציות $f_c(\sigma), f_s(\sigma)$ מוגדרות על ידי שוויונים:

$$f_c(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\sigma xdx, \sigma\in R_+=[0,\infty) \quad (2.1)$$

$$f_s(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\sigma xdx, \sigma\in R_+ \quad (2.2)$$

ונתונות ב$[0,\infty)$. הן נקראות בהתאם: קוסינוס $\left(f_c(\sigma)\right)$ וסינוס $\left(f_s(\sigma)\right)$ התמרת הפורייה של הפונקציה $f(x)$ .

לפעמים משתמשים בסימונים: $F_c(f)(\sigma), F_s(f)(\sigma)$.

***משפט 2.2 (רימן-לבג, מסקנה ישירה. ראה הרצאה 2, פרק 2, משפט 2.1):***

אם $f(x)\in L_1(0,\infty)$ ו $f(\sigma)$ היא קוסינוס או סינוס התמרת הפורייה שלה, אזי:

**1.** $f(\sigma)$ פונקציה חסומה ב $R_+$, בפרט:

$$\left|f(\sigma)\right|\le\sqrt{\frac{2}{\pi}}\|f\|_{L_1(0,\infty)}\quad(2.3)$$

**2.** $f(\sigma)$ פונקציה רציפה (בכל נקודה $\sigma\in R_+$).

**3.** מתקיים השוויון:

$$\lim_{\sigma\to+\infty}f(\sigma)=0\quad(2.4)$$

מטרתנו היא לשחזר את הפונקציה $f(x)$ לפי סינוס או קוסינוס התמרת הפורייה שלה.
לשם כך, נמשיך את הפונקציה $f(x)$ הנתונה באינטרוול $[0,\infty)$ לאינטרוול $(-\infty,0)$

1. באופן זוגי (כלומר סימטרית ביחס לציר ה $Y$)
2. באופן אי זוגי (כלומר סימטרית ביחס לראשית הצירים, צריך להגדיר מחדש את הפונקציה בנקודה אפס, כך: $f(0)=0$ )

אם הפונקציה המקורית $f(x)$ חלקה למקוטעין על$[0,\infty)$, אז ברור שההמשך שלה הינו גם פונקציה חלקה למקוטעין בכל $R$. לפי משפט 1.3 מתקיים:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\cos\sigma t dt\right]\cos\sigma x d\sigma,\quad x\in R$$

עבור $x\ge0$ נקבל (מכיון ש$f(x)=f(x)$ עבור $x\ge0$):

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\cos\sigma t dt\right]\cos\sigma x d\sigma=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\underbrace{\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\sigma t dt\right]}_{f_C(\sigma)}\cos\sigma x d\sigma=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_c(\sigma)\cos\sigma x d\sigma$$

$\Leftarrow$בנקודה $x=0$ הנוסחא נכונה, אם $f(0)=f(+0)$ , באופן דומה (כאן $f$ הינה המשך אי זוגי של $f$ על הקטע $(-\infty,0)$).

אם הפונקציה המקורית $f(x)$ , $x>0$ הייתה חלקה למקוטעין ב$(0,\infty)$, אז גם $f$ פונקציה חלקה למקוטעין בכל $R$.

אז לפי משפט 1.3 מתקיים:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt\right]\sin\sigma x d\sigma,\quad x\in R$$

עבור $x>0$, נקבל (כיוון ש$f(x)=f(x)$ עבור$x>0$):

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt\right]\sin\sigma x d\sigma=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\underbrace{\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt\right]}_{f_S(\sigma)}\sin\sigma x d\sigma=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_s(\sigma)\sin\sigma x d\sigma, x>0$$

בנקודה $x=0$ הנוסחא נכונה, כיוון ש$f(0)=0$ (נזכיר, שאנו מגדירים את הפונקציה מחדש בנקודה $x=0$). וכך, מתקבלים המשפטים 2.3-2.4:

***משפט 2.3:***

תהי נתונה הפונקציה $f(x)\in L_1(0,\infty)$ , חלקה למקוטעין ב$(0,\infty)$. אז מתקיימים השוויונים:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_c(\sigma)\cos\sigma x d\sigma,\ x>0 \quad (2.5)$$

אם בנוסף, הפונקציה $f(\cdot)$ רציפה בנקודה $x$, אזי

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_c(\sigma)\cos\sigma x d\sigma \quad (2.6)$$

בפרט, אם הפונקציה $f(\cdot)$ רציפה לכל $x\in R_+=[0,\infty)$, אז הנוסחא (2.6) משחזרת את הפונקציה לפי קוסינוס התמרת הפורייה שלה (ולכן נקראת נוסחת ההפיכה של קוסינוס התמרת הפורייה)

***הערה:***

מ(2.5) נובע, שהנוסחא (2.6) עבור $x=0$ נכונה, אם $\boxed{f(0)=f(+0)}$

***הערה:***

מ(2.6) ו(2.1) $\Leftarrow$ אם $f\in L_1(R_+)$ והפונקציה חלקה למקוטעין ורציפה $\forall x\in R$ אז:

$$F_c\left[F_c[f]\right]\equiv f \quad (2.7)$$

***משפט 2.4:***

תהי נתונה הפונקציה $f\in L_1(R_+)$ , חלקה למקוטעין ב $R_+$. אז מתקיים:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_c(\sigma)\sin\sigma x d\sigma,\ \ x>0 \quad (2.8)$$

אם בנוסף, הפונקציה $f(\cdot)$ רציפה בנקודה $x$, אזי

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f_c(\sigma)\sin\sigma x d\sigma, \quad x>0 \quad (2.9)$$

בפרט, אם הפונקציה $f(\cdot)$ רציפה לכל $x\in R_+=[0,\infty)$, אז הנוסחא (2.9) משחזרת את הפונקציה $f(\cdot)$ לפי סינוס התמרת הפורייה שלה (ולכן נקראת נוסחת ההפיכה של סינוס התמרת הפורייה)

***הערה:***

מ(2.8) נובע, שהנוסחא (2.9) עבור $x=0$ נכונה, אם $\boxed{f(0)=0}$

***הערה:***

מ(2.9) ו(2.2) $\Leftarrow$ אם $f\in L_1(R_+)$ והפונקציה חלקה למקוטעין ורציפה $\forall x\in R$ אז:

$$F_s\left[F_s[f]\right]\equiv f \quad (2.10)$$

***תרגיל (של המרצה):***

הראה כי נוסחת ההפיכה של קוסינוס התמרת הפורייה נכונה במקרה של הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in[0,1]\\ 0 & ,x>1\end{cases}$$

**פתרון:**

$$f_c(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos\sigma t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1\cos\sigma t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left.\frac{\sin\sigma t}{\sin\sigma}\right|_0^1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\sigma}{\sigma}=$$

$$\Rightarrow\Big(f_c(\sigma)\Big)_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_c(\sigma)\cos\sigma x d\sigma=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\sigma}{\sigma}\cos\sigma x d\sigma=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(1+x)\sigma+\sin(1-x)\sigma}{2\sigma}d\sigma=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\infty\frac{\sin(1+x)\sigma}{\sigma}d\sigma+\int_0^\infty\frac{\sin(1-x)\sigma}{\sigma}d\sigma\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}(a)\ 0\le x\le 1\Rightarrow\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]=1\\ (b)\ x>1\qquad\Rightarrow\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]=0\end{array}\right\}\Big(f_c(\sigma)\Big)_c(x)=f(x)$$

***תרגיל (של המרצה):***

הראה כי נוסחת ההפיכה של קוסינוס התמרת הפורייה נכונה במקרה של הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}x & ,x\in[0,1]\\ 0 & ,x>1\end{cases}$$

**פתרון:**

$$f_c(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos\sigma t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{1}\cos\sigma t dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\int_0^1 td\,\frac{\sin\sigma t}{\sigma}\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left.\frac{t\sin\sigma t}{\sigma}\right|_0^1-\int_0^1\frac{\sin\sigma t}{\sigma}dt\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{\sin\sigma}{\sigma}+\left.\frac{\cos\sigma t}{\sigma^2}\right|_0^1\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin\sigma}{\sigma}+\frac{\cos\sigma-1}{\sigma^2}\right];\Rightarrow$$

$$f_c(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin\sigma}{\sigma}+\frac{\cos\sigma-1}{\sigma^2}\right]\Rightarrow$$

$$\left(f_c(\sigma)\right)_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f_c(\sigma)\cos\sigma x d\sigma=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\sigma}{\sigma}+\frac{\cos\sigma-1}{\sigma^2}\right]\cos\sigma x d\sigma\Rightarrow$$

$$(a)\ \int_0^{\infty}\frac{\sin\sigma}{\sigma}\cos\sigma x d\sigma=\int_0^{\infty}\frac{\sin(1+x)\sigma+\sin(1-x)\sigma}{2\sigma}d\sigma$$

$$(b)\ \int_0^{\infty}\frac{\cos\sigma-1}{\sigma^2}\cos\sigma x d\sigma=-\int_0^{\infty}(\cos\sigma-1)\cos\sigma x d\,\frac{1}{\sigma}=$$

$$=\left.\frac{1-\cos\sigma}{\sigma}\cos\sigma x\right|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\frac{\left(\cos\sigma x-\cos\sigma\cdot\cos\sigma x\right)'}{\sigma}d\sigma=$$

$$\left[\lim_{\sigma\to+0}\frac{1-\cos\sigma}{\sigma}=\left(lopital\right)=\lim_{\sigma\to+0}\frac{\sin\sigma}{1}=0\right]=$$

$$=\int_0^\infty \frac{\left(\cos\sigma\cdot\cos\sigma x-\cos\sigma x\right)'}{\sigma}d\sigma=$$

$$=\int_0^\infty \frac{-\sin\sigma\cos\sigma x-x\sin\sigma x\cdot\cos\sigma+x\sin\sigma x}{\sigma}d\sigma=$$

$$=x\int_0^\infty \frac{\sin\sigma x}{\sigma}d\sigma-\int_0^\infty \frac{\sin(1+x)\sigma+\sin(1-x)\sigma}{2\sigma}d\sigma-$$

$$-x\int_0^\infty \frac{\sin(x+1)\sigma+\sin(x-1)\sigma}{2\sigma}d\sigma\Rightarrow(a)+(b)\Rightarrow$$

$$\left(f_c(\sigma)\right)_c(x)=\frac{2}{\pi}\left\{x\int_0^\infty \frac{\sin\sigma x}{\sigma}d\sigma-x\int_0^\infty \frac{\sin(x+1)\sigma+\sin(x-1)\sigma}{2\sigma}d\sigma\right\}$$

$(1)0\le x\le 1\Rightarrow$

$$\frac{2}{\pi}\left\{x\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{2}{\pi}x\frac{\pi}{2}=x$$

$(2)x>1\Rightarrow$

$$\frac{2}{\pi}\left\{x\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{2}{\pi}\left[x\frac{\pi}{2}-x\frac{\pi}{2}\right]=0$$

לכן נוסחת ההפיכה נכונה.

## **3.שימוש בשאריות לחישוב קוסינוס וסינוס התמרת הפורייה**

נשתמש ב2 המשפטים הבאים:

***משפט 3.1:***

אם מתקיימים התנאים:

**1.** אם הפונקציה $f(z), z\in C$ רגולרית בכל חצי המישור העליון $\operatorname{Im} z \geq 0$, חוץ מבמספר סופי של קטבים

**2.** אין לפונקציה קטבים על הציר הממשי

**3.** $M(R)=\max\limits_{\substack{z=\mathrm{Re}^{i\varphi}\\ 0\leq\varphi\leq\pi}}|f(z)| \xrightarrow{R\to\infty} 0$

**4.** $f(x)=f(-x), x\in R$

אז מתקיים:

$$F_c(\sigma)=\left(f_c(\sigma)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos\sigma x dx=$$
$$=\sqrt{2\pi}i\sum \operatorname{Res}\left(f(z)e^{i\sigma z}\right),\ \sigma\geq 0 \quad (3.1)$$

כאן הסכום כולל רק קטבים בחצי המישור העליון

אם תנאי 4 מוחלף בתנאי 5:

**5.** $f(-x)=-f(x), \forall x\geq 0$

אז מתקיים:

$$F_s(\sigma)=\left(f_s(\sigma)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\sigma x dx=$$
$$=\sqrt{2\pi}i\sum \operatorname{Re}s\left(f(z)e^{i\sigma z}\right),\ \sigma\geq 0 \quad (3.2)$$

כאן הסכום כולל רק קטבים בחצי המישור העליון

***תרגיל:***

מצא את סינוס התמרת הפורייה של הפונקציה:

$$f(x)=\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

***פתרון:***

אנו צריכים למצוא: $f_s(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\sin\sigma x dx,\quad \sigma>0$

נבדוק את תנאי המשפט:

1. $f(z)=\dfrac{z}{\left(1+z^2\right)^2}$ - פונקציה רגולרית בכל מקום, חוץ מבנקודות $z$ שבהן מתקיים $1+z^2=0 \Leftarrow z_{1,2}=\pm i \Leftarrow$ בתחום $\operatorname{Im} z>0$ יש רק את הנקודה $\boxed{z=i}$.
2. הפונקציה רציפה על הציר הממשי

3. עבור $z = \mathrm{Re}^{i\varphi}, \varphi \in [0,\pi]$ מתקיים:

$$f(z) = \frac{|z|}{\left|1+z^2\right|^2} \le \frac{R}{(R^2-1)} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

4. $f(-x) = -f(x)$ $\Leftarrow$ ניתן להשתמש במשפט$\Leftarrow$

$$f_s(\sigma) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{Re}\,s\left(\frac{z}{\left(1+z^2\right)^2}e^{i\sigma z}\right) =$$

$$\left[\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\right] = \frac{1\sqrt{2\pi}}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\left(z-i\right)^2\frac{ze^{i\sigma z}}{\left(z^2+1\right)^2}\right]$$

$$= \sqrt{2\pi}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{ze^{i\sigma z}}{\left(z+1\right)^2}\right] =$$

$$= \sqrt{2\pi}\lim_{z\to i}\frac{\left(ze^{i\sigma z}\right)'\left(z+1\right)^2 - ze^{i\sigma z}2(z+i)}{\left(z+i\right)^4} =$$

$$= \sqrt{2\pi}\lim_{z\to i}\frac{\left(e^{i\sigma z}+i\sigma ze^{i\sigma z}\right)\left(z+1\right)^2 - ze^{i\sigma z}2(z+i)}{\left(z+i\right)^4} =$$

$$= \sqrt{2\pi}\,\frac{\left(e^{-\sigma}+i^2\sigma e^{-\sigma}\right)(2i)^2 - ie^{-\sigma}\cdot 2\cdot 2i}{\left(2i\right)^4} =$$

$$= \sqrt{2\pi}e^{-\sigma}\,\frac{\left(1-\sigma\right)(-4)+4}{16} = \sqrt{2\pi}e^{-\sigma}\,\frac{-4+4\sigma+4}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma e^{-\sigma} \Rightarrow \boxed{f_s(\sigma) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma e^{-\sigma}}$$

***תרגיל:***

חשב את האינטגרל:

$$J = \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx$$

***פתרון:***

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx = \int_0^\infty \frac{\cos \sigma x}{1+x^2}dx\bigg|_{\sigma=1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}f_\sigma(\sigma)$$

כאשר $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\Leftarrow$ נמצא את קוסינוס התמרת הפורייה של הפונקציה

$x \ge 0$ , $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ . (בדוק את תנאי המשפט 3.1).

$$f_c(\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos\sigma x}{1+x^2}dx=\sqrt{2\pi}\cdot i\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^{i\sigma z}}{1+z^2}=$$

$$=\sqrt{2\pi}\cdot i\left[\frac{e^{i\sigma z}}{(1+z^2)'}\right]\Big|_{z=i}=\sqrt{2\pi}\cdot i\frac{e^{-\sigma}}{2i}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\sigma}$$

$$\Rightarrow f_c(\sigma)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\sigma}\quad\Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,f_c(\sigma)\Big|_{\sigma=1}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\sigma}\Big|_{\sigma=1}=$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-1}$$

## 4.שימוש בסינוס וקוסינוס התמרות פורייה לפתרון תרגילי מד"ר

התרגילים והניסוחים של המרצה.

***תרגיל 1***

תהי פונקציה $f(\cdot)\in L_1(0,\infty)$. פתור את בעיית ערך השפה הבאה:

$$\left.\begin{aligned}&-y''(x)+y(x)=f(x)\ ,\ x\in(0,\infty)\\&y(0)=0\ ,\ y(\infty)=y'(\infty)=0\\&y\in L_1(0,\infty)\end{aligned}\right\}\quad(4.1)$$

***פתרון***

בהרצאה 4 (סעיף 5) מצאנו בעזרת התמרת פורייה פתרון לבעיית ערך שפה סינגולארית:

$$\left.\begin{aligned}&-y''(x)+q_0^2y(x)=f(x)\ ,\ x\in R\ ,\ f\in L_1(R)\\&\lim_{|x|\to\infty}y(x)=\lim_{|x|\to\infty}y'(x)=0\end{aligned}\right\}\quad(4.2)$$

דרכינו לפתרון הייתה יותר קלה,מכיוון שעמד לרשותנו מידע א-פריורי על פתירות קורקטית של המשוואה (4.3) במרחב $L_1(R)$:

$$\left.\begin{array}{l} -y''(x)+q(x)y(x)=f(x)\ ,\ x\in R\ ,\ f\in L_1(R) \\ 0\le q(x)\in L_1^{loc}(R) \end{array}\right\} \quad (4.3)$$

ותכונות הפתרון של המשוואה (4.3) הפתירה קורקטית במרחב $L_1(R)$.עבור הבעיה (4.4)

$$\left.\begin{array}{l} -y''(x)+q(x)y(x)=f(x)\ ,\ x\in R_+\ ,\ f\in L_1(R_+) \\ y(0)=0\quad ,\quad 0\le q(x)\in L_1^{loc}(R_+) \end{array}\right\} \quad (4.4)$$

עדיין לא התקבלה הטענה הדומה,ולכן אין ברשותנו שום מידע א-פריורי על הבעיה (4.4).לכן דרך הפתרון של הבעיה (4.1) יהיה שונה באופן מהותי מדרך הפתרון של הבעיה (4.2).

אם כך,נניח שהבעיה (4.1) פתירה.קל לראות (ראה בהמשך), שאם קיים הפתרון של (4.1) אזי הינו יחיד.נשתמש בהנחה (שהפתרון קיים), ונמצא את הפתרון דרך תהליך פורמאלי.כיוון שהפונקציה שמצאנו הינה פתרון רק בתנאי שהפתרון קיים,אזי ניווכח בבדיקה ישירה ,שהפונקציה שמצאנו הינה פתרון (4.1),ובכך נסיים את חקירת (4.1).

***1.יחידות***

נראה כי הבעיה (4.1) בעלת לא יותר מפתרון אחד.נניח בשלילה: קיימים שני פתרונות $y$ ו- $z$ של הבעיה (4.1):

$$\left.\begin{array}{l} -y''(x)+y(x)=f(x)\ ,\ x\in(0,\infty) \\ y(0)=y(\infty)=y'(\infty)=0 \\ y\in L_1(R_+) \end{array}\right\};\left.\begin{array}{l} -z''(x)+z(x)=f(x)\ ,\ x\in(0,\infty) \\ z(0)=z(\infty)=z'(\infty)=0 \\ z\in L_1(R_+) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\ -y''(x)+y(x)=-z''(x)+z(x)\ ,\ x>0\ \Rightarrow$$
$$(z-y)''=(z-y)\ ,x>0\Rightarrow\ z(x)=y(x)+c_1e^{x}+c_2e^{-x}$$

עבור $x\to\infty$ נקבל:

$$0=\lim_{x\to\infty}z(x)=\lim_{x\to\infty}y(x)+c_1\lim_{x\to\infty}e^{x}+c_2\lim_{x\to\infty}e^{-x}\ \Rightarrow$$
$$\boxed{0=0+c_1\cdot\infty+0}\ \Rightarrow\ c_1=0$$

עבור $x\to+0$ נקבל:

$$0=\lim_{x\to+0}z(x)=\lim_{x\to+0}y(x)+c_2\lim_{x\to+0}e^{-x}\ \Rightarrow$$
$$0=0+c_2\cdot1\ \Rightarrow\ c_2=0\ \Rightarrow\ \boxed{y\equiv z}$$

***2.בחירת התמרת פורייה***

אם כך,פתרון הבעיה (4.1) קיים, ואני רוצים למצוא אותו בעזרת התמרת פורייה.כיוון שהבעיה נתונה על הקרן,אזי אנו נשתמש או בסינוס או בקוסינוס התמרת הפורייה.לכן נצטרך לבחור בין שתי ההתמרות.בחירתנו מבוססת על כך שגם סינוס וגם קוסינוס התמרת פורייה-הינה התמרת פורייה על כל הציר עבור פונקציות זוגיות ואי זוגיות בהתאמה.

יהי $y(x)$ פתרון (4.1).אזי $y(x)$ פונקציה רציפה על $[0,\infty)$ (מכיוון שהינה בעלת $y'(x)$), ושווה לאפס עבור $x=0$.

תכונת רציפות של הפונקציה $y(x)$ מובטחת לכל פתרון של המשוואה:

$$-y''(x)+y(x)=f(x)\ ,\ x>0 \quad (4.5)$$

בחירת התמרה (סינוס או קוסינוס) הינה בחירת ההמשכה של $y(x)$ על $(-\infty,0)$.באופן זוגי או אי זוגי?

***שאלה*** תהי נתונה פונקציה $y(x)$ על כל הציר,רציפה בכל נקודה על הציר.ידוע כי

1. $y(x)$ פונקציה זוגית
2. $y(x)$ פונקציה אי זוגית

באילו מן המקרים 1 או 2 מובטח כי $y(0)=0$ ? ידוע:

1. $y(x)=y(-x) \ \Rightarrow \ y(+0)=y(-0)=y(0)$
2. $y(x)=-y(-x) \ \Rightarrow \ y(+0)=-y(-0) \Rightarrow$

מרציפות בנקודה $x=0$ $\Rightarrow$

$$y(0)=y(+0)=-y(-0)=-y(0) \ \Rightarrow \ y(0)=0 .$$

אם כך, מכיוון שהפתרון קיים לפי ההנחה,אזי הדרישה:

$y(x)$ פונקציה אי זוגית-מספקת אוטומטית קיום תנאי ערך שפה $y(0)=0$ .ולכן אנו נבחר את ההמשכה האי זוגית עבור $y(x)$ $\Rightarrow$

אנו נשתמש (בהמשך) בסינוס התמרת פורייה.

## 3. טכניקות שימוש בהתמרת פורייה

מכיון ש- $f \in L_1(R_+)$ , $y \in L_1(R_+)$ $\Leftarrow$ מהמשוואה

$$-y''(x) + y(x) = f(x) \ , x > 0$$

נובע כי $y'' \in L_1(R_+)$ $\Leftarrow$ לכן

$$(-y''(x) + y(x))_s(\sigma) = -y_s''(\sigma) + y_s(\sigma) = f_s(\sigma) \quad (4.6)$$

נחשב $(-y'')_s(\sigma)$.נקבל:

$$(-y'')_s(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty (-y''(t))\sin\sigma t dt =$$

כיוון

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin\sigma t dy'(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{ y'\sin\sigma t\Big|_0^\infty - \sigma\int_0^\infty y'(t)\cos\sigma t dt \right\} =$$

שקיימת $y''(x)$ ברור ש $y'(x)$ פונקציה רציפה לכן

$$\lim_{t\to+0} y'(t)\sin\sigma t = 0, y'(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_0^\infty y'(t)\cos\sigma t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_0^\infty \cos\sigma t dy(t)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\left\{\underbrace{y(t)\cos\sigma t}_{\substack{=0\\ y(0)=y(\infty)=0}}\Big|_0^\infty+\sigma\int_0^\infty(\sin\sigma t)y(t)dt\right\}=$$

$$=\sigma^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty y(t)\sin\sigma t dt=\sigma^2 y_s(\sigma)\Rightarrow$$

$$(-y")_s(\sigma)=\sigma^2(y_s)(\sigma)\Rightarrow$$

ב (4.6):

$$\sigma^2(y_s)(\sigma)+(y_s)(\sigma)=f_s(\sigma)\Rightarrow$$

$$y_s(\sigma)=\frac{f_s(\sigma)}{1+\sigma^2},\qquad \sigma>0\qquad (4.7)$$

אנו הנחנו שהפתרון קיים $\Leftarrow$

1. $y\in L_1(R_+)$
2. $y$ פונקציה חלקה כיוון שקיימת נגזרת רציפה (מקיום $y"$)
3. $y(x)=-y(-x)$ $\Leftarrow$

ממשפט 3.1 נקבל:

$$y(x)=\frac{y(x-0)+y(y+0)}{2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{f_s(\sigma)}{1+\sigma^2}\sin\sigma x d\sigma=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}\left[\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt\right]d\sigma\qquad (4.8)$$

נבדוק כי ב (4.8) ניתן לשנות את הסדר האינטגרציה. כמו מקודם נשתמש לצורך כך במשפט ארצלה. יהי $n \geq 1, m \geq 1$ $\Leftarrow$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}(\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt)d\sigma = \int_0^n \frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}(\int_0^m f(t)\sin\sigma t)dt d\sigma +$$

$$+\underbrace{\int_0^n \frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}(\int_m^\infty f(t)\sin\sigma t dt)d\sigma}_{\eta_{n,m}} + \underbrace{\int_n^\infty \frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}(\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt)d\sigma}_{\alpha_n} =$$ נסתכל

$$= \int_0^n \frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}(\int_0^m f(t)\sin\sigma t dt)d\sigma + \eta_{n,m} + \alpha_n \qquad (4.9)$$

על האינטגרל הראשון ב (4.9):

$$\int_0^n \frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}(\int_0^m f(t)\sin\sigma t dt)d\sigma = \int_0^n \left[\int_0^m \frac{f(t)\sin\sigma t\sin\sigma x}{1+\sigma^2}dt\right]d\sigma \qquad (4.10)$$

נבדוק שבמקרה הנ"ל עבור $n,m \in [1,\infty)$ תנאי משפט ארצלה מתקיימים (הרצאה1 משפט 4.1) על שינוי סדר האינטגרציה:

1. פונקציה $g(t,\sigma) = \dfrac{f(t)\sin\sigma t\sin\sigma x}{1+\sigma^2}$ נתונה במלבן סופי אצלנו $n,m < \infty$.
2. פונקציה $g(t,\sigma)$ אינטגרבילית לפי $t$ ב $[0,m]$ $[0,n] \ni \sigma\forall$
3. פונקציה $g(t,\sigma)$ אינטגרבילית לפי $\sigma$ ב $[0,n]$ $[0,m] \ni t\forall$
4. $\sup\limits_{\substack{0\le t\le m\\0\le\sigma\le n}}|g(t,\sigma)| \le \sup\limits_{0\le t\le m}|f(t)| < \infty$ כיוון שפונקציה $f(\cdot)$ אינטגרבילית במובן של רימן בקטע $[0,m], m<\infty$

$\Leftarrow$

ב (4.10) ניתן לשנות את סדר האינטגרציה

$$\int_0^n \frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}\left[\int_0^m f(t)\sin\sigma t dt\right]d\sigma = \int_0^m f(t)\left[\int_0^n \frac{\sin\sigma x\sin\sigma t}{1+\sigma^2}d\sigma\right]dt \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}[\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt]d\sigma =$$

$$= \int_0^m f(t)[\int_0^n \frac{\sin\sigma x\sin\sigma t}{1+\sigma^2}d\sigma]dt + \eta_{n,m} + \alpha_n \quad (4.11)$$

נשים לב ,שהאינטגרל בחלק השמאלי של (4.11) קיים ואינו תלוי ב-$n$ ו-$m$.בנוסף לכך,

$$0 \le |\eta_{n,m}| = \left|\int_0^n \frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}[\int_m^\infty f(t)\sin\sigma t dt]d\sigma\right| \le$$

$$\le \int_0^n \frac{1}{1+\sigma^2}[\int_m^\infty |f(t)|dt]d\sigma \le \int_0^\infty \frac{d\sigma}{1+\sigma^2}\cdot\int_m^\infty |f(f)|dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_m^\infty |f(t)|dt \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

לכן נבצע ב (4.11) מעבר לגבול עבור $m \to \infty$ ונקבל:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}[\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt]d\sigma =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\int_0^m f(t)[\int_0^n \frac{\sin\sigma x \sin\sigma t}{1+\sigma^2}d\sigma]dt + \alpha_n =$$

$$= \int_0^\infty f(t)[\int_0^n \frac{\sin\sigma x \sin\sigma t}{1+\sigma^2}d\sigma]dt + \alpha_n =$$

$$= \int_0^\infty f(t)[\int_0^\infty \frac{\sin\sigma x \sin\sigma t}{1+\sigma^2}d\sigma]dt -$$

$$-\int_0^\infty f(t)\underbrace{[\int_n^\infty \frac{\sin\sigma x \sin\sigma t}{1+\sigma^2}d\sigma]}_{\beta_n}dt + \alpha_n =$$

$$= \int_0^\infty f(t)[\int_0^\infty \frac{\sin\sigma x \sin\sigma t}{1+\sigma^2}d\sigma]dt + \alpha_n + \beta_n \qquad (4.12)$$

בהמשך,

$$0 \le |\alpha_n| = \left|\int_n^\infty \frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}[\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt]d\sigma\right| \le$$

$$\le \int_n^\infty \frac{d\sigma}{1+\sigma^2}\cdot\int_0^\infty |f(t)|dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$0 \le |\beta_n| = \left|\int_0^\infty f(t)[\int_n^\infty \frac{\sin\sigma x\cdot\sin\sigma t}{1+\sigma^2}d\sigma dt\right| \le$$

$$\le (\int_0^\infty |f(t)|dt)\int_n^\infty \frac{d\sigma}{1+\sigma^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\Rightarrow$$

נבצע ב (4.12) מעבר לגבול עבור $n \to \infty$ ונקבל:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\sigma x}{1+\sigma^2}[\int_0^\infty f(t)\sin\sigma t dt]d\sigma = \int_0^\infty f(t)[\int_0^\infty \frac{\sin\sigma x \sin\sigma t}{1+\sigma^2}d\sigma]dt \quad (4.13)$$

ולכן,נקבל ביטוי הבא עבור $y(x)$ :

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)[\int_0^\infty \frac{\sin\sigma x \sin\sigma t}{1+\sigma^2}d\sigma]dt, x \geq 0 \quad (4.14)$$

כעת,נחשב את האינטגרל הפנימי ב (4.14):

$$\int_0^\infty \frac{\sin\sigma x \cdot \sin\sigma t}{1+\sigma^2}d\sigma = \left| \sin\sigma x \cdot \sin\sigma t = \frac{\cos\sigma(x-t) - \cos(x+t)}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos\sigma(x-t)}{1+\sigma^2}d\sigma - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos\sigma(x+t)}{1+\sigma^2}d\sigma \qquad (4.15)$$

אזי,צריך לחשב את האינטגרל:

$$J(s) = \int_0^\infty \frac{\cos\sigma s}{1+\sigma^2}d\sigma$$

נשים לב כי $J(s) = J(-s)$ $\Leftarrow$ $J(s) = J(|s|)$ $\Leftarrow$

נחשב את האינטגרל:

$$J(|s|) = \int_0^\infty \frac{\cos\sigma|s|}{1+\sigma^2}d\sigma$$

ברור כי האינטגרל הנ"ל הינו (עד כדי כופל) קוסינוס התמרת פורייה של הפונקציה

$$\frac{1}{1+\sigma^2}$$

$$J(|s|)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\cos t|s|}{1+t^2}dt\right\}=$$

ראה תרגיל 1 בהרצאה הנ"ל,כאן נחשב את האינטגרל כקוסינוס התמרת פורייה בעזרת השארית

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\sqrt{2\pi}\cdot i\cdot \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{z^2+1}e^{i|s|z}\right\}=\pi i\frac{e^{i|s|z}}{2i}=$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{-|s|}\quad\Rightarrow$$

$$y(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)[\int_0^{\infty}\frac{\sin\sigma x\cdot\sin\sigma t}{1+\sigma^2}d\sigma]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)[\int_0^{\infty}\frac{\cos\sigma(x-t)}{1+\sigma^2}d\sigma]dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)[\int_0^{\infty}\frac{\cos\sigma(x+t)}{1+\sigma^2}d\sigma]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)[\frac{\pi}{2}e^{-|x-t|}]dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)[\frac{\pi}{2}e^{-|x+t|}]dt\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{y(x)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(t)[e^{-|x-t|}-e^{-|x+t|}]dt\quad,\quad x\geq 0\qquad\qquad (4.16)}$$

ובכן,בהנחה שפתרון הבעיה (4.1):

$$\left.\begin{aligned}&-y''(x)+y(x)=f(x)\ ,\ x\in(0,\infty),\ f\in L_1(0,\infty)\\&y(0)=0\ ,\ y(\infty)=y'(\infty)=0\\&y\in L_1(0,\infty)\end{aligned}\right\}\quad(4.1)$$

קיים ,אנו קיבלנו את הנוסחא (4.16),המבטאת את הפתרון.כעת, נשאר לבדוק שהנוסחא (4.16) מקיימת את כל הדרישות של (4.1).

**.1** $-y''(x)+y(x)=f(x)$ ?

מתקיים:

$$y(x)=\frac{1}{2}[\int_0^x f(t)e^{t-x}dt+\int_x^\infty f(t)e^{x-t}dt]-\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}[e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}dt+e^{x}\int_x^\infty f(t)e^{-t}dt]-\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt$$

$$\Rightarrow$$

$$y'(x)=\frac{1}{2}[-e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}dt+e^{x}\int_x^\infty f(t)e^{-t}dt]+$$

$$+\frac{1}{2}[f(x)-f(x)]+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}[-e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}dt+e^{x}\int_x^\infty f(t)e^{-t}dt]+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt$$

$$\Rightarrow$$

$$y''(x)=\frac{1}{2}\left\{e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}dt+e^{x}\int_x^\infty f(t)e^{-t}dt\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{-f(x)-f(x)\}-\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}dt+e^{x}\int_x^\infty f(t)e^{-t}dt\right\}-\frac{e^{-x}}{2}\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt-$$

$$-f(x)=y(x)-f(x)\quad\Rightarrow\quad\boxed{-y''(x)+y(x)=f(x)}$$

**.2** $y(0)=0$ ?

$$y(0)=\frac{1}{2}[e^{-x}\int_0^x f(t)e^t dt+e^x\int_x^\infty f(t)e^{-t}dt]-\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt\bigg|_{x=0}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{0+\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt\right\}-\frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt=0$$

***3.*** $y(\infty)=\lim_{x\to\infty}y(x)=0$ ?

מ-(4.16) נובע:

$$0\le|y(x)|\le\frac{1}{2}\int_0^\infty|f(t)|e^{-|x-t|}dt+\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^\infty|f(t)|e^{-t}dt$$

נקבע מספר $n\ge1$ ויהי $x\ge n$ $\Leftarrow$

$$0\le 2|y(x)|\le\int_{|x-t|\le n}|f(t)|e^{-|x-t|}dt+\int_{|x-t|\ge n}|f(t)|e^{-|x-t|}dt+$$

$$+e^{-n}\int_0^\infty|f(t)|dt\le\left|\int_0^\infty|f(t)|dt:=\|f\|_1\right|\le$$

$$\le\int_{x-n}^{x+n}|f(t)|dt+e^{-n}\int_{|x-t|\ge n}|f(t)|dt+e^{-n}\|f\|_1\le$$

$$\le\int_{x-n}^\infty|f(t)|dt+2e^{-n}\|f\|_1\ ,\ x\ge n\ ,\ n\ge1\qquad(4.17)$$

ידוע,כי עבור כל פונקציה $\varphi(x)$,הנתונה ב-$(0,\infty)$ תמיד קיימים:

$\underline{\lim}_{x\to+\infty}\varphi(x)$ ו-$\overline{\lim}_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

בנוסף לכך, $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$ קיים $\Leftrightarrow$ מתקיים השוויון:

$$\underline{\lim}_{x\to+\infty}\varphi(x)=\overline{\lim}_{x\to+\infty}\varphi(x) \qquad (4.18)$$

כעת מ- (4.17) נקבל:

$$0\le 2\underline{\lim}_{x\to\infty}|y(x)|\le 2\overline{\lim}_{x\to\infty}|y(x)|\le \overline{\lim}_{x\to\infty}\int_{x-n}^{\infty}|f(t)|dt+e^{-n}\|f\|_1=$$
$$=\left|\lim_{x\to\infty}\int_{x-n}^{\infty}|f(t)|dt=0\Rightarrow \overline{\lim}_{x\to\infty}\int_{x-n}^{\infty}|f(t)|dt=0 \quad (4.18)\right|\le$$
$$\le e^{-n}\|f\|_1\Rightarrow$$

$$0\le 2\underline{\lim}_{x\to\infty}|y(x)|\le 2\overline{\lim}_{x\to\infty}|y(x)|\le e^{-n}\|f\|_1 \qquad (4.19)$$

ב (4.19) נעבור לגבול עבור $n\to\infty$ $\Leftarrow$

$$.\underline{\lim}_{x\to\infty}|y(x)|=\overline{\lim}_{x\to\infty}|y(x)|=0\Rightarrow(4.18)\Rightarrow\lim_{x\to\infty}y(x)=0$$

***4.*** תרגיל: הוכח (בצורה דומה) כי מתקיים השוויון: $\lim_{x\to\infty}y'(x)=0$

***5.*** נשאר לנו לבדוק כי $y(x)\in L_1(R_+)$ . עבור שינויי סדר אינטגרציה בהמשך נשתמש באותן טענות כמו ב (4.13) (וכתיבתן בצורה הפומלית נשארת כתרגיל לקורא)

לכן מ (4.16) נובע:

$$\int_0^\infty |y(x)|dx \le \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty |f(t)|e^{-|x-t|}dt\right]dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}\left(\int_0^\infty |f(t)|e^{-t}dt\right)dx \le \frac{1}{2}\int_0^\infty |f(t)|\left[\underbrace{\int_0^\infty e^{-|x-t|}dx}_{=1}\right]dt +$$

$$+\frac{1}{2}\|f\|_1 \underbrace{\int_0^\infty e^{-x}dx}_{=1} = \frac{1}{2}\|f\|_1 + \frac{1}{2}\|f\|_1 = \|f\|_1 < \infty$$

***תרגיל 2:***

פתור את בעיית ערך השפה

$$\left.\begin{array}{l} -y''(x)+y(x)=f(x),\quad x>0,\quad f\in L_1(0,\infty) \\ y'(0)=0,\quad y(\infty)=y'(\infty)=0 \\ y\in L_1(0,\infty) \end{array}\right\}(4.20)$$

פתרון (4.20) מתבצע באותה הצורה,כמו פתרון (4.1) (ולכן נשאר לקורא),אך עם הבדל אחד:

במקום סינוס התמרת פורייה כאן צריך להשתמש בקוסינוס התמרת פורייה.למה? בחירת סינוס או קוסינוס ההתמרה- זוהי בחירת המשכה $y(x)$ על $(-\infty,0)$,כזו שאוטומטית תקיים תנאי ערך שפה $y'(0)=0$.לכך נצטרך שהנגזרת $y'(x)$ (זוהי פונקציה רציפה מכיוון שקיימת $y''(x)$ ) תהיה פונקציה אי זוגית. אך במידה והנגזרת פונקציה אי זוגית,אזי הפונקציה המקורית זוגית:

1. $f(x)=f(-x)\Rightarrow f'(x)=f'(z)\big|_{z=-x}\cdot(-x)'=-f'(-x)$

2. $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(z)\Big|_{z=-x} \cdot (-x)' = f'(-x)$

לכן צריך לפתור את הבעיה (4.20) בעזרת קוסינוס התמרת פורייה.