פתרון תרגיל 3 אינפי 1 למדמ"ח

1. (א) ידוע כי a, b אינם אינפיניטיסימלים אבל $a-b$ אינפיניטיסימל.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

המספר $\frac{1}{ab}$ הוא סופי (הוא אינו יכול להיות אינסופי כי ab אינו אינפנטיסימל) ולכן $\frac{b-a}{ab}$ הוא אינפיניטיסימל (כפל של אינפיניטיסימל במספר סופי). ולכן באמת $\frac{1}{a} \approx \frac{1}{b}$ כנדרש.

(ב) נבחר $a = \epsilon$ אינפיניטיסימל חיובי כלשהוא. ונבחר $b = 2\epsilon$. אז $b - a = \epsilon$ אכן אינפיניטיסימל, אבל

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon}$$

שהוא מספר אינסופי.

(ג) צריך להוכיח ש $|a| - |\operatorname{st}(a)|$ הוא אינפיניטיסימל. למעשה מספיק להוכיח ש $||a| - |\operatorname{st}(a)||$ הוא אינפיניטיסימל. אבל לפי אי שוויון המשולש

$$||a| - |\operatorname{st}(a)|| \leq |a - \operatorname{st}(a)|$$

אבל $a - \operatorname{st}(a)$ הוא אינפיניטיסימל, ולכן כמובן שגם $|a - \operatorname{st}(a)|$ אינפיניטיסימל וזה מייד גורר את הדרוש.

(ד) צריך להוכיח ש

$$\frac{a}{b} - \frac{\operatorname{st}(a)}{\operatorname{st}(b)}$$

הוא אינפיניטיסימל. נשים לב ש

$$\frac{a}{b} - \frac{\operatorname{st}(a)}{\operatorname{st}(b)} = \frac{a\operatorname{st}(b) - b\operatorname{st}(a)}{b\operatorname{st}(b)} = \frac{a\operatorname{st}(b) - \operatorname{st}(a)\operatorname{st}(b) + \operatorname{st}(a)\operatorname{st}(b) - b\operatorname{st}(a)}{b\operatorname{st}(b)}$$
$$= \frac{(a - \operatorname{st}(a))b}{b\operatorname{st}(b)} + \frac{(\operatorname{st}(b) - b)\operatorname{st}(a)}{b\operatorname{st}(b)}$$

עכשיו, נשים לב ש b אינו אינפיניטיסימל (כי $\operatorname{st}(b) \neq 0$) ולכן $b\operatorname{st}(b)$ הוא סופי שאינו אינפיניטיסימל. אבל $a - \operatorname{st}(a)$ הוא כן אינפיניטיסימל ולכן

$$\frac{(a - \operatorname{st}(a))b}{b\operatorname{st}(b)}$$

הוא אינפיניטיסימל. הסבר דומה מראה שגם

$$\frac{(\operatorname{st}(b) - b)\operatorname{st}(a)}{b\operatorname{st}(b)}$$

הוא אינפיניטיסימל, ולכן סכומם הוא אינפיניטיסימל. כדרוש.

2. (א) חישוב פשוט מראה ש

$$\mathrm{st}(\frac{\epsilon^3-\epsilon^2+4\epsilon}{3\epsilon^2+2\epsilon-3}) = \frac{\mathrm{st}(\epsilon^3-\epsilon^2+4\epsilon)}{\mathrm{st}(3\epsilon^2+2\epsilon-3)} = \frac{0}{3} = 0$$

(ב) נחלק מונה ומכנה ב H^2

$$\frac{3H^2-5H+2}{H^2+1} = \frac{3-\frac{5}{H}+\frac{2}{H^2}}{1+\frac{1}{H^2}}$$

$$\mathrm{st}(\frac{3-\frac{5}{H}+\frac{2}{H^2}}{1+\frac{1}{H^2}}) = \frac{\mathrm{st}(3-\frac{5}{H}+\frac{2}{H^2})}{\mathrm{st}(1+\frac{1}{H^2})} = \frac{3}{1} = 3$$

(ג)

$$\frac{4-a}{2-\sqrt{a}} = \frac{(2-\sqrt{a})(2+\sqrt{a})}{2-\sqrt{a}} = 2+\sqrt{a}$$

ולכן כמובן ש

$$\mathrm{st}(2+\sqrt{a}) = 2+\sqrt{\mathrm{st}(a)} = 4$$

(ד) נבצע כפל בצמוד

$$\begin{aligned}\frac{3-\sqrt{c+2}}{c-7} &= \frac{3-\sqrt{c+2}}{c-7}\,\frac{3+\sqrt{c+2}}{3+\sqrt{c+2}} = \frac{9-c-2}{(3+\sqrt{c+2})(c-7)} \\ &= \frac{-1}{3+\sqrt{c+2}}\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathrm{st}(\frac{-1}{3+\sqrt{c+2}}) = \frac{-1}{3+\sqrt{\mathrm{st}(c)+2}} = -\frac{1}{6}$$

(ה) שוב נכפול בצמוד

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{25-\epsilon}-5}{\epsilon} &= \frac{(\sqrt{25-\epsilon}-5)}{\epsilon}\,\frac{(\sqrt{25-\epsilon}+5)}{\sqrt{25-\epsilon}+5} = \frac{25-\epsilon-25}{\epsilon(\sqrt{25-\epsilon}+5)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{25-\epsilon}+5}\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathrm{st}(-\frac{1}{\sqrt{25-\epsilon}+5}) = -\frac{1}{\sqrt{25-\mathrm{st}(\epsilon)}+5} = -\frac{1}{10}$$

(ו) נחלק מונה ומכנה ב$\sqrt{H}$

$$\frac{\sqrt{H+1}}{\sqrt{2H}+\sqrt{H-1}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{H}}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\frac{1}{H}}}$$

ולכן

$$\mathrm{st}\Big(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{H}}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\frac{1}{H}}}\Big) = \frac{\sqrt{1+\mathrm{st}(\frac{1}{H})}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-\mathrm{st}(\frac{1}{H})}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

(ז) נבצע כפל בצמוד

$$\begin{aligned}\sqrt{H^2+H+1}-H &= (\sqrt{H^2+H+1}-H)\frac{\sqrt{H^2+H+1}+H}{\sqrt{H^2+H+1}+H} \\ &= \frac{H^2+H+1-H^2}{\sqrt{H^2+H+1}+H} = \frac{H+1}{\sqrt{H^2+H+1}+H} \\ &= \frac{1+\frac{1}{H}}{\sqrt{1+\frac{1}{H}+\frac{1}{H^2}}+1}\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathrm{st}\Big(\frac{1+\frac{1}{H}}{\sqrt{1+\frac{1}{H}+\frac{1}{H^2}}+1}\Big) = \frac{1+\mathrm{st}(\frac{1}{H})}{\sqrt{1+\mathrm{st}(\frac{1}{H})+\mathrm{st}(\frac{1}{H^2})}+1} = \frac{1}{2}$$

3. (א) $f(x)=ax^2+bx+c$ הפונקציה כמובן מוגדרת בכל נקודה.

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \frac{ax^2+2ax\Delta x+a(\Delta x)^2+bx+b\Delta x+c-ax^2-bx-c}{\Delta x} \\ &= \frac{2ax\Delta x+a(\Delta x)^2+b\Delta x}{\Delta x} = 2ax+b+a\Delta x\end{aligned}$$

$$f'(x)=\mathrm{st}(2ax+b+a\Delta x)=2ax+b$$

הנגזרת קיימת בכל נקודה.

(ב) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ ברור שהפונקציה מוגדרת לכל x

$$\begin{aligned}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+1}-\frac{1}{x^2+1}}{\Delta x} = \frac{\frac{x^2+1-x^2-2x\Delta x-(\Delta x)^2-1}{(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+1)(x^2+1)}}{\Delta x} \\ &= \frac{-2x\Delta x-(\Delta x)^2}{(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+1)(x^2+1)\Delta x} = \frac{-2x-\Delta x}{(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+1)(x^2+1)}\end{aligned}$$

כעת,

$$f'(x) = \mathrm{st}(\frac{-2x-\Delta x}{(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+1)(x^2+1)}) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

הנגזרת קיימת בכל נקודה.

(ג) $f(x) = x\sqrt{x}$ הפונקציה מוגדרת עבור $x \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \frac{x\sqrt{x+\Delta x}+\Delta x\sqrt{x+\Delta x}-x\sqrt{x}}{\Delta x} \\
&= \frac{x(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})}{\Delta x}+\sqrt{x+\Delta x} \\
&= \frac{x(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})}{\Delta x}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}+\sqrt{x+\Delta x} \\
&= \frac{x(x+\Delta x-x)}{\Delta x}\frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}+\sqrt{x+\Delta x} \\
&= \frac{x}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}+\sqrt{x+\Delta x}
\end{aligned}$$

נשים לב שאם $x=0$ המספר המתקבל אינו סופי ולכן הנגזרת לא קיימת. אם $x \neq 0$ אז

$$f'(x) = \mathrm{st}(\frac{x}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}+\sqrt{x+\Delta x}) = \frac{x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

(ד) קל לראות שהפונקציה $f(x) = |(x-1)^3|$ מוגדרת בכל נקודה. נפצל למקרים:

i. אם $x > 1$ אז למעשה $f(x) = (x-1)^3$ ואז קל לראות ש

$$f(x+\Delta x)-f(x) = 3(x-1)^2\Delta x+3(x-1)(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

ולכן

$$f'(x) = \mathrm{st}(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}) = 3(x-1)^2$$

ii. אם $x < 1$ אז למעשה $f(x) = -(x-1)^3$ וחישוב דומה לקודם יניב:

$$f(x+\Delta x)-f(x) = -3(x-1)^2\Delta x-3(x-1)(\Delta x)^2-(\Delta x)^3$$

ולכן

$$f'(x) = -3(x-1)^2$$

iii. אם $x=1$ אז נקבל $\Delta x>0$ נקבל ש

$$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^3}{\Delta x}=(\Delta x)^2$$

ולכן

$$f'(1)=0$$

כלומר לסיכום

$$f'(x)=\begin{cases}3(x-1)^2 & x\geq 1\\ -3(x-1)^2 & x\leq 1\end{cases}$$

(ה) $f(x)=\sqrt{3x^2+x+5}$ נשים לב שלמשוואה הריבועית $3x^2+x+5$ אין שורשים ולכן הפונקציה מוגדרת בכל נקודה.

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x)-f(x)&=\sqrt{3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2+x+\Delta x+5}-\sqrt{3x^2+x+5}\\&=(\sqrt{3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2+x+\Delta x+5}-\sqrt{3x^2+x+5})\cdot\\&\cdot\frac{\sqrt{3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2+x+\Delta x+5}+\sqrt{3x^2+x+5}}{\sqrt{3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2+x+\Delta x+5}+\sqrt{3x^2+x+5}}\\&=\frac{6x\Delta x+3(\Delta x)^2+\Delta x}{\sqrt{3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2+x+\Delta x+5}+\sqrt{3x^2+x+5}}\end{aligned}$$

ולכן

$$f'(x)=\mathrm{st}(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x})=\frac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x+5}}$$

הנגזרת קיימת בכל נקודה.

(ו) $f(x)=\frac{2x-3}{x+4}$ ברור שהפונקציה מוגדרת לכל $x\neq 4$.

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x)-f(x)&=\frac{2x+2\Delta x-3}{x+\Delta x+4}-\frac{2x-3}{x+4}\\&=\frac{2x^2+2x\Delta x-3x+8x+8\Delta x-12-(2x^2+2x\Delta x+8x-3x-3\Delta x-12)}{(x+\Delta x+4)(x+4)}\\&=\frac{11\Delta x}{(x+\Delta x+4)(x+4)}\end{aligned}$$

ולכן

$$f'(x)=\mathrm{st}(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x})=\frac{11}{(x+4)^2}$$

הנגזרת גם כן מוגדרת לכל $x\neq 4$

(ז) $f(x) = \frac{4}{x-\sqrt{x}}$ הפונקציה מוגדרת עבור $x > 0$ ו $x \neq 1$.

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{4}{x+\Delta x - \sqrt{x+\Delta x}} - \frac{4}{x-\sqrt{x}}$$
$$= 4\frac{x-\sqrt{x}-(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x})}{(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x})(x-\sqrt{x})} = 4\frac{-\Delta x + \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x})(x-\sqrt{x})}$$

נזכור כי

$$\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

נציב בחזרה בביטוי הקודם ונקבל

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 4\frac{-\Delta x + \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}}{(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x})(x-\sqrt{x})}$$

ולכן

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 4\frac{-1 + \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}}{(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x})(x-\sqrt{x})}$$

ו

$$f'(x) = \mathrm{st}(4\frac{-1 + \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}}{(x+\Delta x-\sqrt{x+\Delta x})(x-\sqrt{x})}) = \frac{-1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(x-\sqrt{x})^2}$$

הנגזרת גם מוגדרת לכל $x > 0$ ו $x \neq 1$.