חשבון אינפי 2

תרגיל 1- פתרון

1. הוכיחו כי לכל $0<x<y$ מתקיים $\frac{2}{3}<\frac{x^2+xy}{x^2+xy+y^2}$.

פתרון:

נגדיר $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=x^3$. שתי הפונקציות מקיימות את התנאים של משפט הערך הממוצע של קושי בקטע $[x,y]$ לכל $0<x<y$ ולכן קיימת נקודה $0<x<c<y$ כך ש-

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{2c}{3c^2}=\frac{2}{3c}=\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{y^2-x^2}{y^3-x^3}=\frac{(y-x)(y+x)}{(y-x)\left(y^2+xy+x^2\right)}=\frac{y+x}{y^2+xy+x^2}$$

ולכן

$\frac{y+x}{y^2+xy+x^2}=\frac{2}{3c}$ עבור $0<x<c<y$ ולכן $\frac{c(y+x)}{y^2+xy+x^2}=\frac{2}{3}$ ולכן

$\frac{x^2+xy}{y^2+xy+x^2}=\frac{x(y+x)}{y^2+xy+x^2}<\frac{2}{3}$ כדרוש.

2. חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בכלל לופיטל) :

א. $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

פתרון :

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}\overset{1^\infty}{=}\ldots$$

$$y=(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$$

$$\ln y=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)$$

$$\lim_{x\to1}\ln y=\lim_{x\to1}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)\overset{\infty\cdot0}{=}\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{-1}{(2-x)}}{\frac{1}{-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2-x}=\frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=e^{2/\pi}$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}\overset{\infty^0}{=}\ldots$$

$$y=\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}$$

$$\ln y=\frac{1}{\ln x}\ln\left(1+x^2\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{\left(1+x^2\right)}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\underset{\to0}{\frac{1}{x^2}}+1\right)}=2$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}=e^2$$

ג. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)\overset{\infty-\infty}{=}\ldots$$

$$y=e^{\left(x-\ln\left(1+2e^{x}\right)\right)}=\frac{e^{x}}{1+2e^{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{1+2e^{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{2e^{x}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^{x}\right)\right)\overset{\infty-\infty}{=}\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$$

ד. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)\ln x}{1+\cos(\pi x)}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)\ln x}{1+\cos(\pi x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos(\pi x)\ln x+\frac{\sin(\pi x)}{x}}{-\pi\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x)\ln x}{-\sin(\pi x)}-\frac{1}{\pi x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin(\pi x)\ln x+\frac{\cos(\pi x)}{x}}{-\pi\cos(\pi x)}-\frac{1}{\pi x}=-\frac{2}{\pi}$$

ה. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^{x}}$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\ln x\ln x}}{e^{x\ln(\ln x)}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln^{2}x-x\ln(\ln x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln^{2}x\left(1-\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^{2}x}\right)}$$

נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^{2}x}\right)$$

ע"י שימוש בכלל לופיטל

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^{2}x}\right)\geq\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^{2}x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2\ln x}$$

נשתמש בלופיטל פעם נוספת

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}=\infty$$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\ln^2 x\left(1-\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^2 x}\right)\overset{\infty\cdot(1-\infty)}{=}-\infty$$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\ln x\ln x}}{e^{x\ln(\ln x)}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln^2 x-x\ln(\ln x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln^2 x\left(1-\frac{x\ln(\ln x)}{\ln^2 x}\right)}\overset{e^{-\infty}}{=}0$$

ו. $\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+\frac{x}{\cos^2 x}}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{\tan x}{x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)=1\cdot(-1-1)=-2$$

3. חקרו את הפונקציות הבאות
על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום ההגדרה
ב. זוגיות
ג. נקודות חיתוך עם הצירים
ד. נקודות קיצון
ה. תחומי עליה וירידה
ו. נקודות פיתול
ז. תחומי קעירות (כלפי מעלה וכלפי מטה)
ח. אסימפטוטות
ט. סקיצה של הגרף

א. $f(x)=x^x$ בתחום $x>0$

פתרון:

$f(x)=x^x$ בתחום $x>0$

א. תחום ההגדרה: $D_f=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$

ב. זוגיות- לא רלוונטי, כי תחום ההגדרה אינו סימטרי ביחס ל-0.

ג. נקודות חיתוך עם הצירים- אין

ד. תחומי עליה וירידה

$$\ln f=x\ln x$$
$$\frac{f'}{f}=\ln x+1$$
$$f'(x)=x^x(\ln x+1)=0$$
$$\ln x=-1$$
$$x=\frac{1}{e}$$

לכל $0<x<\frac{1}{e}$ מתקיים $f'<0$ ולכן $0<x<\frac{1}{e}$ תחום ירידה

ולכל $x>\frac{1}{e}$ מתקיים $f'>0$ ולכן $x>\frac{1}{e}$ תחום עליה

ה. $\left(\frac{1}{e},\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)$ נקודת מינימום

ו. תחומי קמירות

$$f''=\left(x^x(\ln x+1)\right)'=x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}=x^{x-1}\left(x(\ln x+1)^2+1\right)>0$$

לכל $x>0$ ולכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה (מחייכת) בכל תחום הגדרתה.

ז. אסימפטוטות

נבדוק האם יש אסימפטוטה אנכית ב- $x=0$ מימין

$\lim_{x\to 0+}x^x=1$ ולכן אין אסימפטוטות אנכיות לפונקציה.

הסבר לחישוב הגבול:

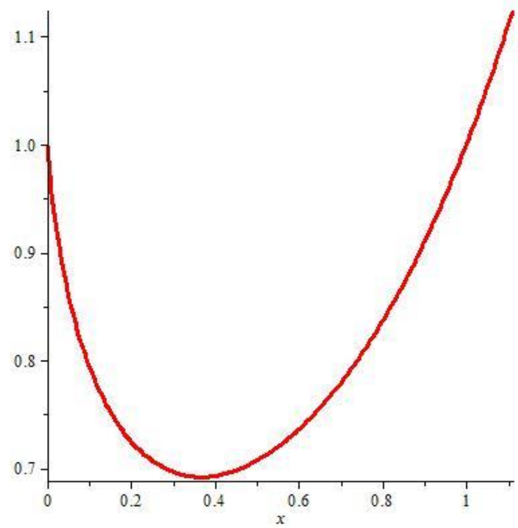
$$\lim_{x\to 0+}\ln f=\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to 0+}f=e^0=1$$

נבדוק האם יש אסימפטוטה משופעת (בפרט אופקית)

$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x^x}{x}=\lim_{x\to\infty}x^{x-1}=\infty$ ולכן אין אסימפטוטה משופעת

ח. הסקיצה של הגרף



ב. $y=x+\sin(2x)$ (בקטע $[-2\pi,2\pi]$)

פתרון:

א.
$[-2\pi,2\pi]$

ב. $y(-x)=-x+\sin(-2x)=-x-\sin(2x)=-y(x)$ ולכן הפונקציה אי זוגית.

ג. חיתוך עם ציר ה- x : $x+\sin(2x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ולכן $(0,0)$ נקודת חיתוך עם ציר ה- x
.
חיתוך עם ציר ה- y : $(0,0)$.

ד. נקודות קיצון

$$y' = 1 + 2\cos(2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} \vee 2x = \frac{4\pi}{3} \vee 2x = \frac{8\pi}{3} \vee 2x = \frac{10\pi}{3} \vee 2x = -\frac{2\pi}{3} \vee 2x = -\frac{4\pi}{3} \vee 2x = -\frac{8\pi}{3} \vee 2x = -\frac{10\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{5\pi}{3}$$

כדי לבדוק האם הנקודות שמצאנו הן נקודות קיצון נגזור פעם נוספת ונבדוק סימן של הנגזרת השנייה בנקודות הללו.

$$y'' = -4\sin(2x)$$
$$y''\left(\frac{\pi}{3}\right), y''\left(\frac{4\pi}{3}\right), y''\left(-\frac{2\pi}{3}\right), y''\left(-\frac{5\pi}{3}\right) < 0$$

ולכן הנקודות

$$\left(\frac{\pi}{3}, y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \left(\frac{4\pi}{3}, y\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right), \left(-\frac{2\pi}{3}, y\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right), \left(-\frac{5\pi}{3}, y\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

הן נקודות מקסימום מקומי של הפונקציה.

$$y''\left(\frac{2\pi}{3}\right), y''\left(\frac{5\pi}{3}\right), y''\left(-\frac{\pi}{3}\right), y''\left(-\frac{4\pi}{3}\right) > 0$$

ולכן הנקודות

$$\left(\frac{2\pi}{3}, y\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right), \left(\frac{5\pi}{3}, y\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right), \left(-\frac{\pi}{3}, y\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right), \left(-\frac{4\pi}{3}, y\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

הן נקודות מינימום מקומי של הפונקציה.

ה. תחומי עלייה וירידה:

תחומי עלייה:

$$\left(-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$$

תחומי ירידה:

$$\left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

ו. נקודות פיתול:

$$y'' = -4\sin(2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x = \pi n$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi n}{2} \quad n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

צריך לבדוק את סימני הנגזרת השנייה מסביב לנקודות הללו.
הסימנים מתחלפים ולכן הנקודות

$$\left(-\frac{3\pi}{2}, y\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right), \left(-\pi, y(-\pi)\right), \left(-\frac{\pi}{2}, y\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right), \left(0, y(0)\right),$$
$$\left(\frac{\pi}{2}, y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right), \left(\pi, y(\pi)\right), \left(\frac{3\pi}{2}, y\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

הן נקודות פיתול.

ז. תחומי קעירות:
תחומי קעירות כלפי מטה:

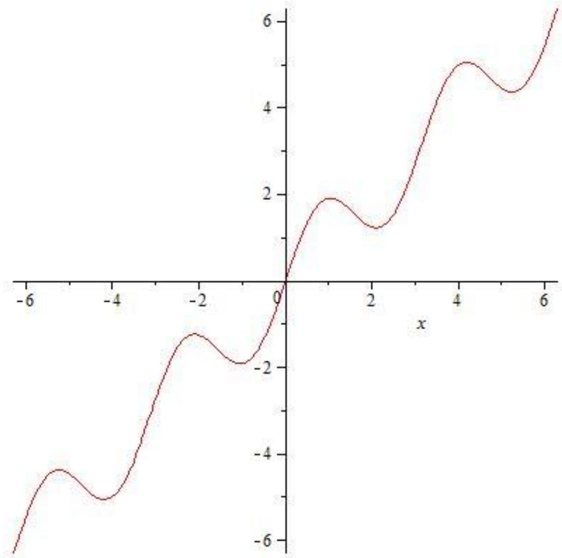
$$\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

תחומי קעירות כלפי מעלה:

$$\left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

ח. לפונקציה אין אסימפטוטות, כי בקצוות הקטע הפונקציה רציפה (משמאל בקצה הימני ומימין בקצה השמאלי) ובתוך הקטע הפונקציה מוגדרת ורציפה בכל הנקודות.

ט.



ג. $f\left(x\right)=\frac{\left|1-x^2\right|}{x}$

פתרון:

א. תחום ההגדרה $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

ב. זוגיות

$f\left(-x\right)=\frac{\left|1-x^2\right|}{-x}=-f\left(x\right)$ ולכן הפונקציה אי זוגית, כלומר הגרף סימטרי ביחס לראשית הצירים.

ג. תחומי עליה וירידה

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1-x^2}{x} & -1<x<1, x\neq 0\\ \frac{x^2-1}{x} & x<-1\vee x>1\\ 0 & x=\pm 1\end{cases}$$

ולכן

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}-1 & -1<x<1, x\neq 0\\ 1+\frac{1}{x^2} & x<-1\vee x>1\end{cases}$$

בנקודות $x=\pm 1$ הנגזרת אינה מוגדרת ולכן נקודות אילו חשודות לקיצון.

תחומי עליה $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

תחומי ירידה $(-1,0)\cup(0,1)$

ד. נקודות קיצון

$(-1,0)$ נקודת מקסימום

$(1,0)$ נקודת מינימום

ה. תחומי קמירות

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3} & -1<x<1, x\neq 0\\ -\frac{2}{x^3} & x<-1\vee x>1\end{cases}$$

$f''>0$ עבור $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ ולכן אילו תחומי קעירות כלפי מעלה (הפונקציה "מחייכת" בתחומים אילו)

$f''<0$ עבור $(-1,0)\cup(1,\infty)$ ולכן אילו תחומי קעירות כלפי מטה (הפונקציה "בוכה" בתחומים אילו)

ו. אסימפטוטות

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|1-x^2|}{x}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|1-x^2|}{x}=-\infty$$

ולכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית גם מימין וגם משמאל

נמצא האם יש אסימפטוטות משופעות (בפרט אופקיות)

באינסוף:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{|1-x^2|}{x^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{|1-x^2|}{x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{|1-x^2|-x^2}{x}=0$$

ולכן משוואת האסימפטוטה המשופעת באינסוף הינה $y=x$.

כנ"ל במינוס אינסוף נקבל $y=x$.

ז. הסקיצה של הגרף