תרגול 3 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

נובמבר 2015

1 מערכות משוואות לינאריות

בתיכון ידענו לפתור מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים, ומטרת השיעור היום היא לדעת לפתור מערכות משוואות לינאריות עם כל מספר של משוואות ועם כל מספר של נעלמים.

הגדרה 1.1. **מערכת משוואות לינאריות** היא מערכת משוואות מהצורה

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

כאשר $b_i, a_{ij} \in \mathbb{F}$. את המערכת אנחנו כותבים בצורה היותר נוחה, כמו טבלה, הנקראת **מטריצה**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

דוגמה 1.2. עבור $\begin{cases} 5x-2y+z=8 \\ x+2y-z=4 \\ -x+7y+2z=27 \end{cases}$, המטריצה היא $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 7 & 2 & 27 \end{array}\right)$.

את המערכת נכתוב בקיצור בצורה $Ax=b$, כאשר:

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ נקראת **מטריצת המקדמים**.

2. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ נקרא **וקטור הנעלמים**.

3. $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ נקרא **וקטור הקבועים**.

שימו לב לגדלים של כל אחד מהסימונים האלו – הגדלים שונים!
אילו פעולות מותר לנו לבצע עם מערכת משוואות כזו מבלי לשנות את הפתרון?

1. מותר לנו להחליף משוואות.
2. מותר לנו לכפול משוואה בסקלר שונה מאפס.
3. מותר לנו להוסיף למשוואה אחת כפולה של משוואה אחרת.

הפעולות האלו מיתרגמות לפעולות על שורות המטריצה:

1. החלפת שורות – $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. כפל שורה בסקלר $\alpha \neq 0$ – $\alpha R_i \to R_i$.
3. הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת – $R_i + \alpha R_j \to R_i$.

הפעולות האלו נקראות **פעולות שורה אלמנטריות**. נעיר כי הפעולות האלו הן הפיכות, ז"א תמיד אפשר לחזור אחורה. אם אפשר להגיע ממטריצה אחת למטריצה אחרת על ידי **דירוג** (כלומר, על ידי פעולות שורה אלמנטריות), נאמר שהן **שקולות שורה**.
איבר מוביל (**איבר ציר**) בשורה של מטריצה הוא האיבר הראשון משמאל ששונה מאפס.
מטריצה נקראת **מטריצה מדורגת**, אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. כל שורות האפסים, אם ישנן, נמצאות בתחתית המטריצה.
2. כל איבר מוביל הוא מימין לאיברים המובילים של השורות הקודמות.

למשל, המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{pmatrix}$ היא מדורגת.
על כל מטריצה אפשר להפעיל פעולות שורה אלמנטריות ולהגיע למטריצה מדורגת.
מטריצה נקראת **מדורגת קנונית**, אם היא מדורגת, וכן מתקיימים התנאים הבאים:

1. כל איבר מוביל הוא 1.
2. כל איבר מוביל הוא היחיד בעמודתו ששונה מאפס.

למשל, המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ היא מדורגת קנונית.

משפט 1.3. כל מטריצה שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית יחידה.

אלגוריתם 1.4 (שיטת האלימינציה / החילוץ של גאוס)**.** אלגוריתם לדירוג מטריצה לצורה הקנונית שלה:

1. מדרגים את המטריצה:

(א) נניח שבעמודה הראשונה יש איבר $a_{i1} \neq 0$ (אחרת, הולכים לעמודה הראשונה שבה יש איבר כזה).

(ב) מעלים אותו לשורה הראשונה.

(ג) משתמשים באיבר הזה כדי לאפס את כל האיברים שמתחתיו.

(ד) ממשיכים באופן דומה בעמודות הבאות, בכל פעם מעלים לשורה אחת מתחת.

2. דואגים שכל איבר מוביל יהיה 1.

3. מאפסים את כל העמודות שיש בהן איברים מובילים, מהשורה התחתונה לעליונה.

כעת נדגים איך אפשר לפתור מערכת משוואות באמצעות דירוג.

דוגמה 1.5. נפתור את המערכת שראינו קודם, $\begin{cases} 5x-2y+z=8 \\ x+2y-z=4 \\ -x+7y+2z=27 \end{cases}$ מעל $\mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 7 & 2 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 8 \\ -1 & 7 & 2 & 27 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-5R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -12 & 6 & -12 \\ -1 & 7 & 2 & 27 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3+R_1\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -12 & 6 & -12 \\ 0 & 9 & 1 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{12}R_2\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-9R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 5\frac{1}{2} & 22 \end{array}\right)$$

קיבלנו צורה מדורגת. עכשיו נעבור לצורה מדורגת קנונית:

$$\xrightarrow{\frac{2}{11}R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+\frac{1}{2}R_3\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_3\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

המטריצה מדורגת קנונית, ולכן סיימנו. אם נמיר את זה בחזרה למערכת משוואות, נקבל את המערכת $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$, ולכן זהו פתרון מערכת המשוואות הנתון.

דוגמה 1.6. נפתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} x+2y+4z=3 \\ y+5z=1 \\ 2x+5y+13z=7 \end{cases}$ מעל $\mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 13 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_1\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת אפסים, ולכן יש אינסוף פתרונות. במקרה זה, נסמן את **המשתנה החופשי** $z=t$, ונביע את שאר המשתנים בעזרתו.

מערכת המשוואות שקיבלנו לאחר הדירוג (בלי שורת האפסים) היא $\begin{cases} x-6z=1 \\ y+5z=1 \end{cases}$. לכן $\begin{cases} x=6t+1 \\ y=1-5t \end{cases}$.

בסך הכל, הפתרון הכללי הוא $\{(6t+1,1-5t,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$.

דוגמה 1.7. נפתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} x+2y+4z=3 \\ y+5z=1 \\ 2x+5y+13z=8 \end{cases}$ מעל $\mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 13 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_1\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

אם נתרגם למשוואות את השורה האחרונה, נקבל את המשוואה $0=1$. קיבלנו סתירה, ולכן אין פתרון.

אלגוריתם 1.8 (קביעת מספר הפתרונות של מערכת משוואות)**.** נניח שנתונה מערכת משוואות. מדרגים את המטריצה עד לצורה מדורגת.

1. אם יש שורה שבה הכל אפסים חוץ מהקבוע החופשי (שהוא שונה מ-0), כלומר **שורת סתירה**, אין פתרון.
2. בכל מקרה אחר, מספר הפתרונות הוא מספר האיברים בשדה בחזקת מספר המשתנים החופשיים. בפרט:
   (א) אם אין משתנים חופשיים, יש פתרון יחיד.
   (ב) אם יש משתנה חופשי, ואם יש אינסוף איברים בשדה, יש אינסוף פתרונות.

תרגיל 1.9. פתרו את מערכת המשוואות $\begin{cases} \overline{3}x+\overline{5}y+z=\overline{0} \\ -x-\overline{2}y+\overline{3}z=\overline{0} \\ \overline{4}x+y-\overline{2}z=\overline{0} \end{cases}$ מעל $\mathbb{Z}_5$. כמה פתרונות יש למערכת?

פתרון. כמו קודם, נשים במטריצה ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \overline{3} & \overline{5} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{-1} & \overline{-2} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{4} & \overline{1} & \overline{-2} & \overline{0} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{3} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{4} & \overline{3} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{4} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{0} \end{array}\right) \xrightarrow{2R_1\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{4} & \overline{3} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{4} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{0} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[R_3+R_1\to R_3]{R_2+R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{array}\right) \xrightarrow{2R_2\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{array}\right)$$

קיבלנו צורה מדורגת קנונית עם שורת אפסים. נסמן את המשתנה החופשי $z=t$. המערכת היא $\begin{cases} x+\overline{2}z=\overline{0} \\ y=\overline{0} \end{cases}$, ולכן הפתרון הכללי הוא $\left\{\left(\overline{3}t,\overline{0},t\right) \mid t\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

למרות שנראה שיש אינסוף פתרונות, כי יש שורת אפסים, יש רק חמישה פתרונות, כי הערך של t הוא ב-$\mathbb{Z}_5$, כלומר הוא יכול לקבל רק חמישה ערכים.

תרגיל 1.10. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x+y+az=a \\ ax+ay+z=1 \\ x+ay+az=2 \end{cases}$ מעל $\mathbb{R}$. קבעו (ונמקו) לאילו ערכים של a:

1. למערכת יש פתרון יחיד.
2. למערכת אין פתרון.
3. למערכת יש אינסוף פתרונות. במקרה זה, רשמו את הפתרון המתקבל.

פתרון. מתחילים מלדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1\to R_3]{R_2-aR_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{array}\right)$$

קיבלנו את צורה מדורגת. אם $a \neq \pm 1$, אז יש פתרון יחיד (כי בכל שורה יש איבר מוביל שונה מאפס, ולכן אפשר לדרג קנונית).
אם $a=1$, מהשורה השנייה מקבלים שורת סתירה, ולכן אין פתרון.
אם $a=-1$, אין שורת סתירה, ויש אינסוף פתרונות. נציב $a=-1$ כדי למצוא את הפתרון הכללי:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x+y-z=-1 \\ -2y=3 \end{cases} \Longrightarrow y=-1.5$$

נציב $z=t$, ונקבל $x-1.5-t=-1$, כלומר $x=t+0.5$. לכן, הפתרון הכללי הוא $\{(t+0.5,-1.5,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$.

מערכת משוואות הומוגנית (אם יש זמן)

הגדרה 1.11. אומרים שמערכת משוואות היא **הומוגנית**, אם כל $b_i=0$. כלומר, המערכת היא מהצורה $Ax=0$.

טענה 1.12. המיוחד לגבי מערכות משוואות הומוגניות:

1. תמיד יש לנו את הפתרון הטריוויאלי, $x_1=\cdots=x_n=0$. בפרט, למערכת משוואות הומוגנית תמיד יש פתרון!
2. אם $v_1,\ldots,v_t$ הם פתרונות של המערכת, ואם $\alpha_1,\ldots,\alpha_t\in\mathbb{F}$ הם סקלרים, אזי גם $\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_tv_t$ הוא פתרון של המערכת.

מערכת משוואות אי-הומוגנית (אם יש זמן)

הגדרה 1.13. **מערכת משוואות אי-הומוגנית** היא מערכת משוואות שאינה הומוגנית.

משפט 1.14. נסתכל על המערכת $Ax=b$. נניח שיש לנו פתרון פרטי שלה, w. אזי קבוצת הפתרונות של המערכת הזו היא

$$\{v+w \mid Av=0\}$$

כלומר, פתרונות המערכת $Ax=b$ הם הסכום של פתרונות המערכת $Ax=0$ עם פתרון פרטי של המערכת $Ax=b$.

אלגוריתם 1.15 (פתרון מערכת משוואות אי-הומוגנית)**.** להלן אלגוריתם לפתרון מערכת משוואות אי-הומוגנית:

1. מדרגים את המערכת לצורה מדורגת. אם קיבלנו שורת סתירה, אין פתרון.
2. מאפסים את עמודת הקבועים, ומוצאים את פתרונות המערכת ההומוגנית.
3. מוצאים פתרון פרטי של המערכת האי-הומוגנית, למשל על ידי איפוס כל המשתנים החופשיים.
4. פתרונות המערכת המקורית הם סכום הפתרונות שמצאנו בסעיף 2 עם הפתרון שמצאנו בסעיף 3.

דוגמה 1.16. נפתור את המערכת

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ \qquad\quad -3x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 6 \end{cases}$$

מעל $\mathbb{R}$. בצורת מטריצה,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 6 & -4 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

נעקוב אחר האלגוריתם:

1. אצלנו המערכת כבר מדורגת, ורואים שאין שורת סתירה. לכן, יש פתרון.
2. אם נאפס את עמודת הקבועים, נקבל את המערכת שראינו קודם – ואנו יודעים שהפתרונות שלה הם
$$\{(-2t_1 + t_2 + 3t_3, t_1, t_2 + 2t_3, t_2, t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$$
3. נחפש פתרון פרטי של המערכת האי-הומוגנית. אם נאפס את המשתנים החופשיים, כלומר נציב $x_2 = x_4 = x_5 = 0$, נקבל את הפתרון $(-2, 0, -2, 0, 0)$.
4. לכן, פתרונות המערכת האי-הומוגנית הם

$$\{(-2t_1 + t_2 + 3t_3 - 2, t_1, t_2 + 2t_3 - 2, t_2, t_3) \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$$