פתרון תרגיל בית 6 – טופולוגיה

שאלה 1

יהי X מ"ט ותהי $A\subseteq X$. תהי $\chi_A : X \to \{0,1\}$ פונקציה אופיינית המוגדרת ע"י $\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$. יהי $x\in X$.

א) הוכיחו שאם χ_A רציפה ב x אז $x\notin \partial(A)$.

הוכיחו ש χ_A רציפה אם ורק אם A סגוחה ב - X.

פתרון

א) נחלק למקרים: מקרה ראשון- $x\in A$. לכן, $\chi_A(x)=1$. מהרציפות בנקודה x ומכיון ש $\{1\}$ סביבה של 1 נקבל שקיימת V סביבה של x כך ש $\chi_A(V)\subseteq\{1\}$. מכאן נובע ש $x\in V\subseteq A$. לכן, $x\in \operatorname{int}(A)$ ולכן $x\notin\partial(A)$.

מקרה שני- $x\notin A$. לכן, $\chi_A(x)=0$. מהרציפות בנקודה x ומכיון ש $\{0\}$ סביבה של 0 נקבל שקיימת V סביבה של x כך ש $\chi_A(V)\subseteq\{0\}$. מכאן נובע ש $V\cap A=\varnothing$ ולכן $x\notin cl(A)$ ובסה"כ $x\notin\partial(A)$.

ב) עפ"י סעיף א' ומה שהוכחנו בתרגול χ_A רציפה ב-x אמ"מ $x\notin\partial(A)$. כעת, χ_A רציפה אמ"מ χ_A רציפה ב-x לכל $x\in X$ וזה אמ"מ $x\notin\partial(A)$ לכל $x\in X$. התנאי האחרון מתקיים אמ"מ $\partial(A)=\varnothing$.

נוכיח את טענת העזר הבאה ונסיים את ההוכחה.

טענת עזר: $\partial(A)=\varnothing$ אמ"ם A סגוחה.

הוכחת טענת עזר:

$(\Rightarrow)$ אם A סגוחה אז היא סגורה ופתוחה. מכאן $A=cl(A)$ וגם $A=\operatorname{int}(A)$. מכאן $\partial(A)=cl(A)\setminus int(A)=\varnothing$.

$(\Leftarrow)$ תמיד מתקיים $\operatorname{int}(A)\subseteq A\subseteq cl(A)$ ולכן אם $\partial(A)=cl(A)\setminus int(A)=\varnothing$ נקבל ש $\operatorname{int}(A)=cl(A)$ ומכאן גם $\operatorname{int}(A)=A=cl(A)$ ולכן A סגוחה.

מש"ל הוכחת טענת עזר.

הערה: ניתן היה לפתור את התרגיל בשימוש ברציפות גלובלית ובכך שרציפות שקולה לכך שתמונה הפוכה של פתוחה (סגורה) היא פתוחה (בהתאמה סגורה).

שאלה 2

תהי X קבוצה אינסופית. יהי x_0 איבר ב- X. נגדיר

$\tau = \{A \subseteq X: x_0 \notin A\} \bigcup \{B \subseteq X : X \setminus B \text{ is finite}\}$.

א) הוכיחו ש- τ טופולוגיה על X.

ב) הראו שכל הנקודונים ב- X, פרט ל- $\{x_0\}$, הינם סגוחים. מה לגבי $\{x_0\}$?

ג) הראו: $cl(A) = \begin{cases} A & A \text{ is finite} \\ A \cup \{x_0\} & \text{otherwise} \end{cases}$.

ד) הראו: $int(A) = \begin{cases} A & X \setminus A \text{ is finite} \\ A \setminus \{x_0\} & \text{otherwise} \end{cases}$.

פתרון

א. נראה שמתקיימות 3 התכונות של טופולוגיה:

1) $\varnothing \in \tau$ שכן $x_0 \notin \varnothing$. $X \in \tau$ שכן $X \setminus X = \varnothing$ סופית.

2) יהיו $O_1, O_2 \in \tau$. יתכנו שני מקרים:

1. $x_0 \notin O_1$ או $x_0 \notin O_2$. במקרה זה $x_0 \notin O_1 \cap O_2$ ומכאן $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

2. $X \setminus O_1, X \setminus O_2$ סופיות. במקרה זה נקבל ש $X \setminus (O_1 \cap O_2) = X \setminus O_1 \cup X \setminus O_2$ סופית כאיחוד סופי של סופיות וגם במקרה זה נקבל ש $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

3) נניח שלכל $i \in I$ מתקיים $O_i \in \tau$. יתכנו שני מקרים:

1. לכל $i \in I$, $x_0 \notin O_i$ במקרה זה נקבל $x_0 \notin \bigcup_{i \in I} O_i$ ומכאן $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.

2. קיים i_0 כך ש $X \setminus O_{i_0}$ סופית אבל במקרה זה נסיק ש- $X \setminus \bigcup_{i \in I} O_i \subseteq X \setminus O_{i_0}$ סופית.

לכן, גם במקרה זה $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.

ב. תהי $x_1 \neq x_0$ נראה ש $\{x_1\}$ סגוחה.

$\{x_1\}$ פתוחה שכן $x_0 \notin \{x_1\}$.

$\{x_1\}$ סגורה- נוכיח זאת ע"י שנראה ש $X\setminus\{x_1\}$ פתוחה. מתקיים

$\{x_1\}=X\setminus\left(X\setminus\{x_1\}\right)$ סופית ולכן $X\setminus\{x_1\}$ פתוחה.

נראה כעת ש- $\{x_0\}$ סגורה ואינה פתוחה.

סגורה- בדיוק כפי שמוכיחים ש- $\{x_1\}$ סגורה. $\{x_0\}$ אינה פתוחה שכן $x_0\in\{x_0\}$

וכמו כן $X\setminus\{x_0\}$

אינסופית כי X אינסופית.

ג. נפרק לשני מקרים:

A סופית.

במקרה זה יש להראות כי $cl(A)=A$, ואנחנו נראה זאת ע"י כך שנראה כי A

סגורה. ואכן, $A=X\setminus(X\setminus A)$ סופית, לכן $X\setminus A$ פתוחה ולכן A סגורה.

A אינסופית.

במקרה זה יש להראות כי $cl(A)=A\cup\{x_0\}$. נראה כי $A\cup\{x_0\}$ היא הקבוצה

הסגורה המינימלית המכילה את A. תחילה נשים לב כי אם A אינסופית וכן

$x_0\notin A$, אזי A אינה סגורה. אכן, אם נניח בשלילה כי היא סגורה, נקבל ש- $X\setminus A$

פתוחה. אך $x_0\in X\setminus A$ ולכן בהכרח מתקיים $X\setminus(X\setminus A)$ סופית. אבל אז נקבל ש-

A סופית, בסתירה לנתון.

כעת, נראה כי $A\cup\{x_0\}$ סגורה. מתקיים $x_0\notin X\setminus\left(A\cup\{x_0\}\right)$ ולכן $X\setminus\left(A\cup\{x_0\}\right)$

פתוחה, ולכן $A\cup\{x_0\}$ סגורה.

ד. גם כאן יש שני מקרים:

$X\setminus A$ סופית.

במקרה זה, A היא קבוצה פתוחה (לפי הגדרת הטופולוגיה) ולכן $int(A)=A$.

$X\setminus A$ אינסופית.

נראה $A\setminus\{x_0\}$ תת קבוצה פתוחה מקסימלית של A ומכאן $int(A)=A\setminus\{x_0\}$

פתוחה: $x_0\notin A\setminus\{x_0\}$ ולכן $A\setminus\{x_0\}$ פתוחה .

מקסימלית:

אם $A\setminus\{x_0\}=A$ אז המקסימליות ברורה.

אם $A\setminus\{x_0\}\neq A$ אז A לא פתוחה (שכן במקרה זה $x_0\in A$ וגם אנו תחת ההנחה ש $X\setminus A$ אינסופית.)

ומכאן $A\setminus\{x_0\}$ הפתוחה המקסימלית המוכלת ב- A.

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

יהי X מרחב טופולוגי, U קבוצה פתוחה וְ- A קבוצה צפופה.

הוכיחו $U\subseteq cl(A\cap U)$. הסיקו: $cl(U)=cl(A\bigcap U)$.

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה שקיים $u\in U$ ו $u\notin cl(A\cap U)$. אזי קיימת סביבה O של u כך ש $A\cap O\cap U=\varnothing$. כעת, U פתוחה ו- $u\in U$ ולכן גם U סביבה של u. לכן, $V:=U\cap O$ סביבה של u המקיימת $A\cap V=\varnothing$. בסתירה לכך ש A צפופה (אחד מהקריטריונים לצפיפות הוא: A צפופה אם ורק אם $A\cap W\neq\varnothing$ לכל W פתוחה ולא ריקה. אצלנו, V פתוחה ולא ריקה).

מכאן $U\subseteq cl(A\cap U)$.

<u>הוכחת המסקנה</u>: $A\cap U\subseteq U$ ומכאן $cl(A\cap U)\subseteq cl(U)$ נוכיח את ההכלה הפוכה ונקבל הדרוש.

$cl(A\cap U)$ סגורה המכילה את U ומכאן $cl(U)\subseteq cl(A\cap U)$. בסה"כ $cl(U)=cl(A\cap U)$.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו שבכל מרחב נורמי מתקיים $cl(B(a,r))=B[a,r]$. מצאו דוגמא נגדית עבור מרחב מטרי שאינו נורמי.

<u>פתרון</u>

נראה קודם דוגמא נגדית במרחב מטרי שאינו נורמי: נבחר $X=\{a,b\}$ עם המטריקה הדיסקרטית: $d(a,b)=1$. אזי נבחר את הכדור הפתוח $B(a,1)$ ומתקיים $B(a,1)=\{a\}$ ולכן סגור.

שימו לב: שסגור של קבוצה סגורה הוא הקבוצה עצמה ולכן
$cl(B(a,1)) = cl(\{a\}) = \{a\}$ (כמו כן, יכולתם לראות שזה הסגור דרך הקריטריון
של הסדרות). מאידך, $B[a,1] = \{a,b\}$.

כעת נוכיח את הטענה במרחב נורמי:

נוכיח הכלה דו כיוונית:

$cl(B(a,r)) \subseteq B[a,r]$ - שימו לב שהכלה זו נכונה בכל מרחב מטרי, לאו דווקא
מרחב נורמי. מתקיים $B(a,r) \subseteq B[a,r]$, הוכחתם ש-$B[a,r]$ היא קבוצה סגורה
בכל מרחב מטרי ולכן $cl(B(a,r)) \subseteq B[a,r]$.

$cl(B(a,r)) \supseteq B[a,r]$ - שימו לב שהכלה זו אינה נכונה בכל מרחב מטרי (ראו
דוגמא נגדית) אך כן נכונה בכל מרחב נורמי. יהי $x \in B[a,r]$ ונראה שיש סדרה
ב- $B(a,r)$ שמתכנסת אליו.

<u>מוטיבציה לבחירת הסדרה</u>: $x \in B[a,r]$ ולכן $\|x-a\| \le r$ ואז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים
$\left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a)\right\| = \left(1-\frac{1}{n}\right)\|x-a\| < r$. ז"א, אנחנו מחפשים סדרה $\{y_n\}$ כך ש-
$y_n - a = \left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a)$ ואז יהי מובטח ש-$y_n \in B(a,r)$. מהעברת אגפים נקבל
את הסדרה:

$\{y_n\} = \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)x + \frac{a}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(a,r)$. מתקיים $y_n \to x$ שכן:

$$\|y_n - x\| = \left\|\left(1-\frac{1}{n}\right)(x-a)\right\| = \left(\frac{1}{n}\right)\|x-a\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\left(\left(\frac{1}{n}\right) \to 0, \|x-a\| \le r\right)$$

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

א. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה בת מניה. הוכיחו ש- $\operatorname{int}(A) = \varnothing$.

ב. מצאו: $\operatorname{int}(\mathbb{Q}), cl(\mathbb{Q})$ (ב-$\mathbb{R}$).

ג. הוכיחו ש- $A := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \quad x_1 = 0\}$ סגורה ב $\mathbb{R}^n$ ו- $\operatorname{int}(A) = \varnothing$.

<u>פתרון</u>

א. נניח בשלילה שהפנים לא ריק. אזי קיימת $a \in \operatorname{int}(A)$. אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$. אך מתקיים $|A| \le \aleph_0$ ועם זאת $|(a-\varepsilon, a+\varepsilon)| = \aleph$ וזאת סתירה.

ב. $\operatorname{int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ ברור מא'

$cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$: $cl(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$ ברור. נותר להראות את ההכלה ההפוכה. אך ראיתם באינפי' כי לכל ממשי יש סדרת איברים רציונאליים המתכנסת אליו.

ג. תהי $p_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ההטלה על הרכיב הראשון. A סגורה שכן: $A = p_1^{-1}(\{0\})$.

נוכיח שהפנים ריק: תהי $a = (0, a_2, ..., a_n) \in A$ ונראה ש- $a \notin \operatorname{int}(A)$. יש להראות שלכל $\varepsilon > 0$ $B(a,\varepsilon) \not\subset A$. למשל: $\left(\frac{\varepsilon}{2}, a_2, ..., a_n\right) \in B(a,\varepsilon) \setminus A$.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

תהיינה τ_1, τ_2 טופולוגיות על X כך ש- $\tau_1 \subseteq \tau_2$. הוכיחו:

א. F סגורה ב- (X,τ_1) $\Leftarrow$ F סגורה ב- (X,τ_2).

נסמן ב- $\operatorname{int}_{\tau_i}(A)$ את הפנים של A במרחב (X,τ_i) (כנ"ל עבור $cl_{\tau_i}(A)$).

ב. הוכיחו או הפריכו: $\operatorname{int}_{\tau_1}(A) \subseteq \operatorname{int}_{\tau_2}(A)$, $cl_{\tau_1}(A) \supseteq cl_{\tau_2}(A)$.

היעזרו (בין השאר) במה שהוכחתם על היחס בין הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$ לבין הטופולוגיה של סורגנפריי וענו על הסעיף הבא:

ג. יהי $(\mathbb{R}, T)$ הישר של סורגנפריי. מצאו פנים וסגור של הקבוצות הבאות

$(0,1], (0,1), [0,1], [0,1)$.

<u>פתרון</u>

א. F סגורה ב-(X,T_1) ולכן $F^C \in T_1$ ולכן $F^C \in T_2$ ולכן F סגורה ב-(X,T_2).

ב. $\operatorname{int}_{T_1}(A) \subseteq \operatorname{int}_{T_2}(A)$: $\operatorname{int}_{T_1}(A) = \bigcup_{T_1 \ni O \subseteq A} O \underset{T_1 \subseteq T_2}{\subseteq} \bigcup_{T_2 \ni O \subseteq A} O$

$cl_{T_1}(A) \supseteq cl_{T_2}(A)$:

$cl_{T_2}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in (X,T_2)}} F$ וגם $cl_{T_1}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in (X,T_1)}} F$. כעת נשים לב שלפי א', אם $A \subseteq F$ וכן סגורה לפי T_1 אזי $A \subseteq F$ סגורה לפי T_2. לכן

$cl_{T_2}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in (X,T_2)}} F \supseteq cl_{T_1}(A) = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ is closed} \\ in (X,T_1)}} F$.

ג. שימו לב שהטופולוגיה של סורגנפריי מכילה את הטופולוגיה הרגילה, ולכן כל קבוצה פתוחה לפי הרגילה, פתוחה לפי סורגנפריי; וכנ"ל לגבי קבוצה סגורה (לפי סעיף א).

$(0,1)$ פתוח לפי סורגנפריי ומתקיים $\operatorname{int}((0,1)) = (0,1)$. מה לגבי הסגור?

הקבוצה $(0,1)$ אינה סגורה, מכיוון שיש בה סדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 2}$ המתכנסת ל-0.

לכן $0 \in cl((0,1)) \setminus (0,1)$. מצד שני, $[0,1)$ סגור ולכן זו בהכרח הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את $(0,1)$ ומכאן $cl(0,1) = [0,1)$.

$[0,1]$: זו קבוצה סגורה בטופולוגיה הרגילה ולכן סגורה גם בסורגנפריי ולכן $cl[0,1] = [0,1]$. בנוסף, נשים לב כי זו קבוצה לא פתוחה: כל סביבה של 1 מכילה סביבה מהצורה $[1,\varepsilon)$ עבור $\varepsilon > 1$ כלשהו ולכן לא מוכלת בקבוצה. נמצא את הפנים: הפנים הוא הקבוצה הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב-$[0,1]$ ולכן $\operatorname{int}[0,1] = [0,1)$.

$[0,1)$: סגוחה (בדקו!) ולכן $\operatorname{int}([0,1)) = cl([0,1)) = [0,1)$.

$(0,1]$: ניתן לראות (משני נימוקים קודמים) שהיא אינה פתוחה ואינה סגורה. הפתוחה המקסימלית שמוכלת בתוכה היא $(0,1)$ והסגורה

המינימלית שמכילה אותה היא $[0,1]$ ולכן:

$$\operatorname{int}\left((0,1]\right)=(0,1),\quad cl\left((0,1]\right)=[0,1].$$

מש"ל