תרגול 10

נגזרות

תזכורת משיעור שעבר

הגדרה

תהיי f פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x = x_0$.

אם קיים הגבול $L = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ אז נאמר כי הפונקציה f גזירה בנקודה $x = x_0$, ונרשום $f'(x_0)=L$. המספר L ייקרא הנגזרת של הפונקציה בנקודה $x = x_0$.

כללי גזירה

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות בנקודה x, ויהי c מספר קבוע. אזי

א. $(cf(x))' = cf'(x)$.

ב. $(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$.

ג. $(f(x)g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

ד. אם $g(x)\neq 0$ אזי $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

דוגמאות

יש להוסיף

כלל השרשרת

תהי $y = f(x)$ פונקציה גזירה בנקודה $x = x_0$, ותהי $z = g(y)$ פונקציה גזירה בנקודה $y = y_0$. אזי הפונקציה המורכבת $z = g(f(x))$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים השוויון

$z_x' = \left[g(f(x_0))\right]' = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$.

דוגמאות

יש להוסיף

הערה

נזכור שפונקציה רציפה הפיכה בקטע (a,b) אם ורק אם היא מונוטונית עולה/יורדת ממש ב (a,b) והפונקציה ההופכית גם רציפה.

להוסיף: דוגמא של $\tan x, \arctan x$.

נגזרת של פונקציה הפוכה

תהי $y = f(x)$ פונקציה הפיכה ורציפה בסביבת הנקודה x_0, אם $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 ואם $f'(x_0)\neq 0$ אזי גם הפונקציה ההפוכה שלה $x = g(y)$ גזירה בנקודה $y_0 = f(x_0)$ ומתקיים השוויון

$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

דוגמא

הנגזרת של $f(x) = \arcsin x$, $-1 < x < 1$.

פתרון

$y=\arcsin x \Leftarrow \sin y = x$, לפי המשפט הקודם נקבל ש $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>נגזרת של פונקציה מהצורה</u> $y = f(x)^{g(x)}$ כאשר $f(x) > 0$

אם $y = f(x)^{g(x)}$ אז $\ln y = \ln f(x)^{g(x)} \Leftarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$

נגזור את שני האגפים ונקבל

$\frac{y'}{y} = \left(g(x)\ln f(x)\right)'$.

<u>דוגמא</u>

נחשב את הנגזרת של $y = x^{\sin x}$ כאשר $0 < x$.

לפי החישוב הקודם נקבל ש $\frac{y'}{y} = (\sin x \ln x)' \Rightarrow y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

<u>משפט</u>

אם פונקציה גזירה בקטע והנגזרת שלה חסומה, אז היא רציפה במידה שווה.

<u>הערה</u>

ההפך לא בהכרח נכון

הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$ אבל הנגזרת שלה לא חסומה.

<u>תרגיל</u>

הוכח שהפונקציה $f(x) = x + \sin x$ רציפה במידה שווה ב $\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

$f'(x) = 1 + \cos x$. פונקצית הנגזרת חסומה ולכן הפונקציה רציפה במידה שווה.

<u>משפט פרמה</u>

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הפתוח (a,b) וגזירה בנקודה פנימית x_0. אם $f(x)$ מקבלת בנקודה x_0 את ערכה הגדול ביותר או את ערכה הקטן ביותר אזי $f'(x_0) = 0$.

<u>הערה</u>

שימו לב לחשיבות הדרישה ש $f(x)$ תהייה גזירה.

הפונקציה $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$ מקבלת ערך מינימאלי כאשר $x = 1$.

הנגזרת לא קיימת במקרה זה.

<u>משפט רול</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע הסגור $[a,b]$ המקיימת את התנאים הבאים:

א. $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$.

ב. $f(x)$ גזירה בקטע הפתוח (a,b).

ג. $f(a) = f(b)$.

אזי קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש $f'(c) = 0$.

<u>תרגיל ממבחן (מועד א סמסטר א 2009)</u>

כמה פתרונות יש למשוואה $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10 = 0$.

<u>פתרון</u>

נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=x^5-5x^4+5x^3+10$.

$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2\left(x^2-4x+3\right)=5x^2\left(x-3\right)\left(x-1\right)$.

הנקודות שהנגזרת מתאפסת הם $0,1,3$.

ממשפט רול נקבל שבכל אחד מהקטעים $\left(\infty,0\right],\left[0,1\right],\left[1,3\right],\left[3,\infty\right)$ יש לכל היותר פתרון אחד.

על פי משפט ערך הביניים נוכל לדעת האם יש פתרון בכל אחד מהקטעים הנ"ל.

נתבונן בקטע $\left(-\infty,0\right]$

$f\left(0\right)=10,\ f\left(-10\right)<0$ ולכן יש פתרון אחד בקטע $\left(-\infty,0\right]$.

נתבונן בקטע $\left[0,1\right]$

$f\left(0\right)=1,\ f\left(1\right)=11$ ולכן אין פתרון בקטע $\left[0,1\right]$.

נתבונן בקטע $\left[1,3\right]$

$f\left(1\right)=11,\ f\left(3\right)=-17$ ולכן יש פתרון אחד בקטע $\left[1,3\right]$.

נתבונן בקטע $\left[3,\infty\right)$

$f\left(3\right)=-17,\ f\left(10\right)>0$ ולכן יש פתרון אחד בקטע $\left[3,\infty\right)$.

סה"כ נקבל שלושה פתרונות למשוואה.

<u>תרגיל ממבחן (מועד ב סמסטר א 2009)</u>

כמה פתרונות יש למשוואה $x\sin x+\cos x=x^2$ בקטע $\left[0,\infty\right)$.

<u>פתרון</u>

במידה ויאפשר הזמן

<u>משפט הערך הממוצע של לגראנז</u>

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $\left[a,b\right]$ וגזירה בקטע הפתוח $\left(a,b\right)$.

אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f'(c)=\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$.

<u>תרגיל ממבחן (מועד א סמסטר א 2012)</u>

מצא נקודת/נקודות לגרנז' של הפונקציה $f\left(x\right)=x^3-x^2-14x+24$ בקטע $\left[-5,5\right]$.

<u>פתרון</u>

$f'\left(x\right)=3x^2-2x-14$ יש למצוא נקודה c כך ש $11=\dfrac{54-\left(-56\right)}{10}=\dfrac{f\left(5\right)-f\left(-5\right)}{5-\left(-5\right)}=f'(c)$

ז"א $3x^2-2x-14=11\Rightarrow 3x^2-2x-25=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{304}}{6}$

וקיבלנו את נקודות לגראנז'.

<u>תרגיל ממבחן (מועד ב סמסטר א 2012)</u>

מצא נקודת לגרנז' c של הפונקציה $f\left(x\right)=x^4$ ב $\left[1,3\right]$.

<u>פתרון</u>

במידה ויאפשר הזמן...

<u>משפט הערך הממוצע של קושי</u>

יהיו $f(x)$ ו $g(x)$ שתי פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירות בקטע הפתוח (a,b), ובנוסף לכך $g'(x)\neq 0$ לכל $a<x<b$. אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

<u>דוגמא</u>

לתת דוגמא לשתי פולינומים ולהראות שאכן המשפט מתקיים.

<u>משפט לופיטל</u>

יהיו $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות גזירות בסביבת הנקודה $x=a$, פרט אולי לנקודה a עצמה, נניח כי

א. קיימים הגבולות $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$.

ב. $g'(x)\neq 0$ לכל $x\neq a$ בסביבת הנקודה a.

ג. קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

אזי קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ומתקיים $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

<u>הערה</u>

לא רשמתי כאן את כל המקרים שבהם מטפל משפט לופיטל.

באופן כללי משפט לופיטל עוזר למצוא את הגבולות עבור המקרים $\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}$.

עבור $0\cdot\infty$ גם ניתן להשתמש בכלל לופיטל מכיוון ש $0\cdot\infty=\frac{\infty}{\cancel{1}\!/0}=\frac{\infty}{\infty}$.

עבור 1^{∞} גם ניתן להשתמש בלופיטל ע"י חישוב הגבול $e^{\ln 1^{\infty}}\Rightarrow \infty\cdot\ln 1=\frac{\infty}{\cancel{1}\!/\ln 1}=\frac{\infty}{\infty}$.

ובאותו אופן ניתן לחשב את 0^0.

<u>תרגיל ממבחן סמסטר א מועד א 2009</u>

חשב: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}$.

<u>פתרון</u>

נשים לב שכל התנאים של משפט לופיטל מתקיימים ולכן מספיק לחשב את הגבול

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin 2x}{-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-4\sin x\cos x}{-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}4\sin x=4.$$

<u>תרגיל ממבחן סמסטר א מועד ב 2009</u>

חשב: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

<u>פתרון</u>

נשים לב שקיבלנו 0^0 ולכן נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln x\right)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln x\right)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln x}=\frac{1-\ln x}{x\ln x}=0$$

ואז $e^0=1$.

<u>תרגיל ממבחן סמסטר א מועד א 2012</u>

חשב: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{e^x}-e^{x+1}}{x^2}$.

<u>פתרון</u>

שוב כל התנאים של משפט לופיטל מתקיימים ולכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{e^x}-e^{x+1}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x e^{e^x}-e^{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0}e^x\lim_{x\to 0}\frac{e^{e^x}-e}{2x}=\lim_{x\to 0}e^x\lim_{x\to 0}\frac{e^x e^{e^x}}{2}=\frac{e}{2}.$$

<u>תרגיל ממבחן סמסטר א מועד ב 2012</u>

חשב: $\lim_{x\to 0}\frac{xe^{\sin x}-\ln(1+x)}{x^2}$.

<u>פתרון</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{\sin x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}+x\cos xe^{\sin x}-\frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{1+x\cos x-\frac{e^{-\sin x}}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\frac{-\cos xe^{-\sin x}(1+x)-e^{-\sin x}}{(1+x)^2}}{2}=1.5$$