מרצה: מיכאל מגרל **megereli@math.biu.ac.il** אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 8

טענה: נניח X קבוצה ו γ אוסף תת קבוצות ב X. התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה מסוימת.
2. א. $X \in \gamma^{\cup}$

   ב. חיתוך של 2 קבוצות מ γ אפשר להציג כאיחוד של קבוצות מ γ.

הערה: ב שקול ל ב*: $\forall A,B \in \gamma\ \forall x \in A \cap B\ \exists C \in \gamma \quad x \in C \subseteq A \cap B$

ב* שקול ל ב**: $\gamma^{\cap_F} \subseteq \gamma^{\cup}$.

הוכחה: נגדיר אוסף $\tau := \gamma^{\cup}$. מ"ל τ טופולוגיה.

$(t_1) \quad \varnothing, X \in \tau$

הסבר: $X \in \tau$. בגלל תנאי א. תנאי $\varnothing \in \tau$ נובע מהתכונה הנ"ל על $\gamma^{\cup}$.

$(t_2) \quad \tau^{\cap_F} = \tau$

הסבר: $\tau^{\cap_F} = (\gamma^{\cup})^{\cap_F} = (\gamma^{\cap_F})^{\cup} \subseteq (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \tau$.

$(t_3) \quad \tau^{\cup} = \tau$

הסבר: $\tau^{\cup} = (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \tau$.

☺

הערה: מקרה פרטי חשוב לתנאי ב בטענה הוא "סגירות לגבי חיתוכים סופיים" ($\gamma^{\cap_F} = \gamma$)

נשתמש בנושא של מכפלות טופולוגיות.

דוגמה: $\gamma := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$

$[a_1,b_1) \cap [a_2,b_2) = [a_3,b_3) \quad a_3 := \max\{a_1,a_2\},\ b_3 := \min\{b_1,b_2\}$

לכן $\gamma^{\cap_F} = \gamma$.

תזכורת:

הגדרה: $\beta \subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** בנקודה a, אם לכל $U \in N(a)$ קיים $V \in \beta$ כך ש $V \subseteq U$.

הגדרה: אומרים ש- (X,τ) **בעל תכונת מנייה ראשונה**, ונסמן: $(X,\tau) \in B_1$ אם לכל נקודה $a \in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

דוגמה: לכל (X,d) דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה a –

$\beta_1 := \{B_r(a)\}_{r>0}$

$\beta_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ בן מנייה ! $\beta_3 := \{B[a,\frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$

תוצאה: $Metriz \subset B_1$

דוגמה: $(X,\tau_{discr}) \in \mathrm{B}_1$.

הסבר: לכל $a \in (X,\tau)$ היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון $\alpha := \{a\}$ הוא בסיס מקומי.

הערה:

- מספיק לבדוק רציפות פונקציה דרך בסיס.
- מספיק לבדוק רציפות בנקודה עבור סביבות מבסיס מקומי.
- מספיק לבדוק התכנסות סדרות עבור סביבות מבסיס מקומי

תרגיל: B_1 תכונה תורשתית.

טענה: $B_2 \subset B_1$

הסבר: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X,τ). לכל $a \in X$ נגדיר $\gamma_a := \{A \in \gamma \mid a \in A\}$.

אז γ_a בסיס מקומי בנקודה a.

דוגמה: $B_2 \neq B_1$ $\begin{cases}(\mathbb{R},\tau_{discr}) \in B_1 \\ (\mathbb{R},\tau_{discr}) \notin B_2\end{cases}$

הערה: $Discrete \subset Metriz \subset B_1$

$Metriz \cap Sep \subset B_2 \subset B_1$

הגדרה: $\mathbf{dim}(X) = 0 \overset{def}{=}$ קיים בסיס γ לטופולוגיה כך שכל $A \in \gamma$ קבוצה סגוחה .

הגדרה כללית: ***Menger–Urysohn*** (ראו גם עבודת סמינר לסטודנטים)

עבור מרחבים עם $X \in T_3$ מגדירים:

- $\dim(\varnothing) = -1$
- $\dim X \le 1$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim \partial(A) \le 0 \quad \forall A \in \gamma$.
- $\dim X \le n+1$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim \partial(A) \le n \quad \forall A \in \gamma$.

הערה: מסמנים יותר ב $ind\, X$ (*inductive dimension*).

דוגמאות: $\dim \mathbb{R}^n = \dim S_n = n$ ....

משפט: אם $X \in T_1$ וגם $\dim(X) = 0$ אז - $X \in T_{3\frac{1}{2}}$.

הוכחה: נניח $a \in X, a \notin B, cl(B) = B$.

על מנת לבדוק $X \in T_{3.5}$ צ"ל קיימת הפרדה פונקציונלית של a ו B.

$a \in B^c \in \tau$. לכן לפי הגדרת מימד אפס (ושל בסיס) קיימת קבוצה סגוחה O כך ש $a \in O \subseteq B^c$

$O \subset X$ קב' סגוחה אזי $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in O \\ 1, & x \notin O \end{cases}$

רציפה! (4 מקרים .... ראינו הוכחה דומה).

ברור שהפונקציה מפרידה a ו B.

☺

טענה: אם $\dim X = 0, X \in T_1$ אז X בלתי קשיר לחלוטין.

הוכחה: תשתמשו ברעיון של המשפט הקודם. לכל תת קבוצה $A \subseteq X$ ששונה מנקודון קיימת פונקציה רציפה $f: A \to \{0,1\}$ **על**. לכן A לא קשירה.

☺

דוגמאות:

א. $\dim(X, \tau_{discr}) = 0$

τ_{discr} בסיס לעצמו ומוכב מקבוצות סגוחות.

ב. $\dim(\mathbb{Q})=0$.

$\gamma := \{(a,b)\cap\mathbb{Q} \mid a,b\in\mathbb{Q}^c\}$ בסיס שמורכב מקבוצות סגוחות.

ג. $\dim(\mathbb{Z},d_p)=0$.

כל כדור הוא סגוח ב $(\mathbb{Z},d_p)$ (בעצם גם בכל מרחב אולטרהמטרי)

ד. $\dim(\mathbb{R},\tau_s)=0$ Sorgenfrey line

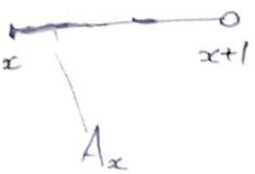
תזכורת: $O\in\tau_s \overset{def}{=} x\in O \Rightarrow \exists\, \epsilon=\epsilon_x>0: [x,x+\epsilon_x)\subset O$.

תכונות קו סורגנפריי: $(\mathbb{R},\tau_s)$ $\tau_s := \{O\subseteq\mathbb{R} : x\in O\Rightarrow \exists\varepsilon>0\,[x,x+\varepsilon)\subseteq O\}$

- $(\mathbb{R},\tau_s)\in T_2$

$\gamma:=\{[a,b) : a,b\in\mathbb{R}\}$ בסיס $(\gamma^{\cup}=\tau_s)$ $O=\bigcup_{x\in O}[x,x+\epsilon_x)$.

- א. $\tau\neq\tau_s$ ב. $\tau\subset\tau_s$.
  $(a,b)=\cup\{[x,x+\varepsilon_x) \mid x\in(a,b)\}\in\tau_s$
- $(\mathbb{R},\tau_s)\in B_1$ $\{[a,a+\frac{1}{n}) : n\in\mathbb{N}\}\subset N_{\tau_s}(a)$ בסיס מקומיבן מניה
- $(\mathbb{R},\tau_s)\in Sep$ $cl_{\tau_s}(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$
- **טענה**: $(\mathbb{R},\tau_s)\notin B_2$



הוכחה: נניח בשלילה שקיים בסיס $\gamma\subset\tau_s$ כך ש γ בן מנייה.

$[x,x+1)\in\tau_s$ פתוחה, לכן הוא שווה לאיחוד איברים מבסיס γ.

אז קיים $A_x\in\gamma$ כך ש - $x\in A_x\subset[x,x+1)$.

נבחר A_x כזה ונגדיר העתקה $x\longmapsto A_x$ $\mathbb{R}\xrightarrow{\varphi}\gamma$

φ חח"ע $(x\neq y\Rightarrow A_x\neq A_y)$.

$$2^{\aleph_0}=\aleph=|\mathbb{R}|=|\varphi(\mathbb{R})|\le|\gamma|$$

מכאן $\aleph_0<2^{\aleph_0}\le|\gamma|$, לכן γ לא בת מנייה!

- $(\mathbb{R},\tau_s)\notin Metriz$ (כי הוא ספרבילי ללא B_2)
- $\dim(\mathbb{R},\tau_s)=0$. בסיס γ מורכב מקבוצות סגוחות. $\Leftarrow$
- $(\mathbb{R},\tau_s)\in T_{3\frac{1}{2}}$ (נובע מהתכונה הקודמת והמשפט שהוכחנו).

קשר בין עקרון *Heine* ותכונת B_1

הגדרה: אומרים שמ"ט X הוא בעל **תכונת** $\boldsymbol{FU}$ $(Frechet - Urysohn)$ אם:

$$\forall\, A \subseteq X: \;\; scl(A) = cl(A)$$

הערה: $Metriz \subset B_1 \subset FU$

הערה: למדנו דוגמה של מ"ט שהוא לא *FU*.

טענה: $B_1 \subseteq FU$.

הוכחה מקוצרת: שימו לב שאם $X \in B_1$ אז לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מנייה $\alpha = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ <u>מונוטוני</u> (ז"א $U_{n+1} \subseteq U_n$). אפשר "לתקן" כל בסיב מקומי בן מנייה (חיתוכים סופיים רקורסיסית) לקבלת בסיס מקומי מונוטוני.

ואז ההמשך דומה למקרה של מ"מ ...

משפט (עיקרון $\boldsymbol{Heine}$ מתוקן): נניח $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ פו' בין מ"ט. נניח ש - $(X,\tau) \in FU$ (למשל: $(X,\tau) \in B_1$) אין הגבלה על Y. אז התנאים הבאים שקולים:

(1) f רציפה.

(2) f שומרת על התכנסות (ז"א $f(scl(A)) \subseteq scl(f(A))$).

הוכחה: $(1) \Leftarrow (2)$: תמיד (ממשפט $\frac{1}{2}$ *Heine*).

$(2) \Leftarrow (1)$:

$$f\big(cl(A)\big) \underbrace{=}_{X \in FU} f\big(scl(A)\big) \underbrace{\subseteq}_{\text{נתון}} scl\big(f(A)\big) \underbrace{\subseteq}_{\text{תמיד מתקיים}} cl\big(f(A)\big)$$

☺

תוצאה: עיקרון $Heine$ נכון עבור קו $Sorgenfrey$ $(\mathbb{R},\tau_S) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ (כתחום הפונקציה) כי $(\mathbb{R},\tau_S) \in B_1 \subset FU$.

הערה: בטופולוגיה, באנליזה ... יש צורך אמיתי ב"סדרות מוכללות":

$(M,\preccurlyeq)$ קבוצה <u>סדורה חלקית</u> **מכוונת** (לכל $\forall a,b \in M \;\exists c \in M \;\; a \le c, b \le c$).

סדרה מוכללת או רשת (generalized sequence or net) היא פונקציה $(M,\preccurlyeq) \xrightarrow{f} X$ (סדרה רגילה: $(\mathbb{N},\le) \xrightarrow{f} X$).

<u>דוגמה חשובה</u>: כל בסיס מקומי β (לנקודה a) דוגמה לקבוצה סדורה מכוונת.

אם לכל $V \in \beta$ נבחר באיבר $x_V \in V$ אז נקבל $\lim\{x_V : V \in \beta\} = a$.

דרך רשתות אפשר לתת תיאור של $cl(A)$.

$z \in cl(A) \Leftrightarrow z$ גבול של סדרה מוכללת

ואז יש הכללת עיקרון $Heine$ ...

<u>שימו לב:</u> למשל **אינטגרלים** זה סוג של גבול (אבל לא גבול רגיל !)

דרך סדרות מוכללות מסוימות.

ספר מומלץ: ד. ליבוביץ, טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה.

Pre-base (subbase)

<u>הגדרה:</u> נניח (X,τ) מ"ט. $\alpha \subseteq \tau$ נקרא פרה-בסיס (אומרים גם תת-בסיס) אם

$\alpha^{\cap F}$ הוא בסיס ל τ <u>שקול:</u> $(\alpha^{\cap F})^{\cup} = \tau$

<u>דוגמאות:</u>

1) כל בסיס הוא פרה-בסיס.

2) א) $X = \mathbb{R}$ $\alpha := \{(-\infty, b), (a, \infty)\}$. $a, b \in \mathbb{R}$ (או $a, b \in \mathbb{Q}$).

α פרה– בסיס אבל לא בסיס! $\underbrace{\gamma = \{(a,b)\}}_{\text{בסיס ל-}\mathbb{R}} \subset \alpha^{\cap_2} \subset \alpha^{\cap F}$

<u>הגדרה</u>: לכל קבוצה **סדורה ליניארית** $(X, \leq)$ אפשר להגדיר

$\tau_{\leq}$ "interval topology"

עם פרה-בסיס $\alpha := \{(-\infty, b), (a, \infty) \mid a, b \in X\}$ $\tau_{\leq} = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$

ב) $X = \mathbb{R}^2$. $\alpha = \{(a,b) \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (c,d)\}$

כאשר $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ (או $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$) הוא פרא-בסיס.

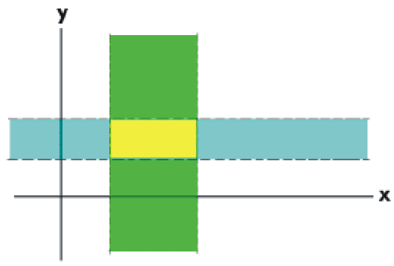


Fig. 2

<u>טענה:</u> נניח $X,Y \in TOP$ ונתונה פונקציה $f: X \to Y$.

$\alpha \subset \tau_Y$ פרה-בסיס. אז התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה.
2. $\forall U \in \alpha: f^{-1}(U) \in \tau_X$.

<u>הסבר:</u>

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u> בגלל קריטריון 2 של הרציפות.

<u>$(2) \Leftarrow (1)$:</u> צ"ל $\forall O \in \tau_Y: f^{-1}(O) \in \tau_X$.

מצד שני, α תת בסיס ל τ_Y, לכן $O \in \tau_Y = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

$f^{-1}(O) \in \tau_X$ כי ה"מקור" שומר על $\cap_F$ וגם על $\cup$.

■

<u>תוצאה:</u> התנאים הבאים שקולים :

1. $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה.
2. $f^{-1}(-\infty, b), f^{-1}(a, \infty)$ פתוחות לכל $a, b \in \mathbb{Q}$ (או $a, b \in \mathbb{R}$).

<u>הסבר:</u> דוגמה 2א + הטענה.

■

<u>טענה:</u> נניח $\alpha \subset P(X)$ כך ש α כיסוי ל X. אז α הוא פרא-בסיס לטופולוגיה $\tau := (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$.

<u>הסבר:</u>

(t_1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \alpha^{\cup}$ (כי נתון ש – α כיסוי).

(t_2) $\tau^{\cap_F} = ((\alpha^{\cap_F})^{\cup})^{\cap_F} = ((\alpha^{\cup})^{\cap_F})^{\cap_F} = (\alpha^{\cup})^{\cap_F} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau$

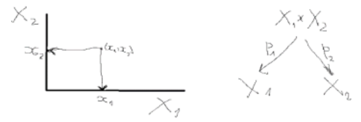
(t_3) $\tau^{\cup} = ((\alpha^{\cap_F})^{\cup})^{\cup} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau$.

■

<u>מכפלה טופולוגית (מס' סופי של הגורמים)</u>

(X_1,τ_1), (X_2,τ_2) מ"ט. איך מגדירים "טופולוגיה טבעית" על

$$X = X_1\times X_2 = \{(x_1,x_2)\mid x_1\in X_1, x_2\in X_2\} = \prod_{i\in\{1,2\}} X_i \qquad (X_1\times X_2, \tau_\Pi = ?)$$



כללי יותר: $\tau_\Pi = ?$ על $X = X_1\times\cdots\times X_n = \{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in X_i\} = \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i$

<u>רעיון:</u> מגדירים <u>טופולוגית מכפלה</u> כטופולוגיה הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של **<u>הטלות</u>**

$$p_k : \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i \to X_k \qquad p_k(x_1,\cdots,x_n) = x_k$$

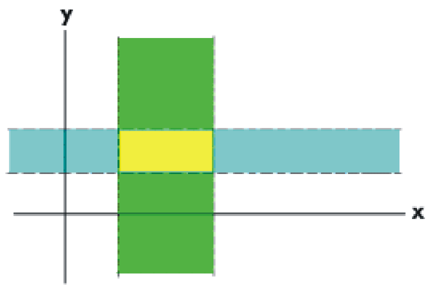


Fig. 2

$$\{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2 \mid x_1\in O_1\} = p_1^{-1}(O_1) = O_1\times X_2$$

$$p_2^{-1}(O_2) = X_1\times O_2$$

$$(O_1\times X_2)\cap(X_1\times O_2) = p_1^{-1}(O_1)\cap p_2^{-1}(O_2) = \underbrace{O_1\times O_2}$$

"מלבן פתוח"

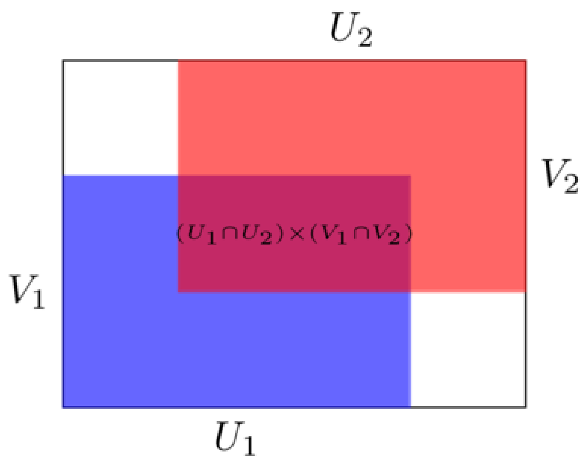
$O_1\times X_2$, $X_1\times O_2$ חייבים להיות מתוך טופולוגיה τ_π על $X_1\times X_2$ על מנת להבטיח את הרציפות.

אז גם חיתוך (סופי) $O_1\times O_2\in\tau_\pi$.

<u>הגדרה:</u> $\gamma := \{O_1\times\cdots\times O_n \mid O_i\in\tau_i\}$ "תיבות בסיסיות"

("מלבנים פתוחים" $\gamma := \{O_1\times O_2 \mid O_1\in\tau_1, O_2\in\tau_2\}$ במקרה של $n=2$)

מקיים את התנאים: $\gamma^{\cap F} = \gamma, X\in\gamma$



$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

לכן (לפי הטענה) γ בסיס לטופולוגיה מסוימת $\gamma^{\cup}$. נגדיר

$$\tau_{\prod} = \gamma^{\cup}$$

שקול: $O \in \tau_{\prod} \Leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n) \in O \Rightarrow \exists O_i \in \mathrm{N}(x_i) \quad O_1 \times \cdots \times O_n \subseteq O$

<u>משפט:</u> $X = (\prod_{i \in \{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_{\prod})$ מ"ט ו $\tau_{\prod}$ הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

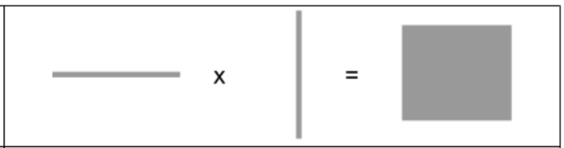
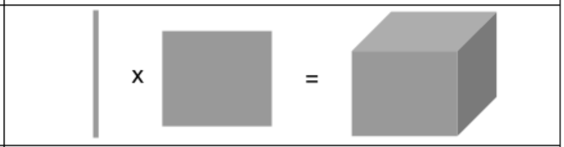
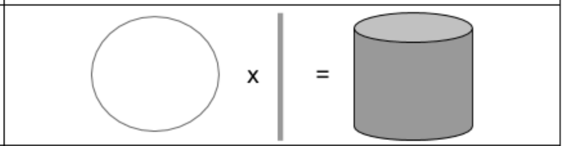
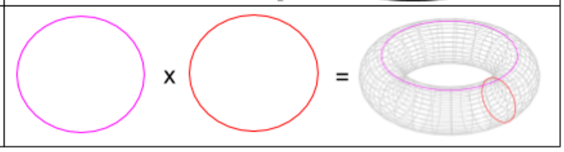
$$\mathrm{p}_i : (\prod_{i \in \{1,\cdots,n\}} \mathrm{X}_i, \tau_{\prod}) \to (\mathrm{X}_i, \tau_i) \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$$

בסיס סטנדרטי $\gamma := \{O_1 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות בסיסיות". $\tau_{\prod} = \gamma^{\cup}$.

פרה-בסיס סטנדרטי $\alpha := \{\mathrm{p}_i^{-1}(O_i) = \mathrm{X}_1 \times \cdots \times O_i \times \cdots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות אלמנטריות"

אז

$$\alpha^{\cap_F} = \gamma \quad \tau_{\prod} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$$

$I^1 \times I^1 = I^2$	
$I^1 \times I^2 = I^3$	
$S^1 \times I^1$ = Cylinder	
$S^1 \times S^1$ = Torus	

טורוס *n*-ממדי $\quad S_1{}^n = S_1 \times \cdots \times S_1 \simeq T^n$

הוא בעל מימד *n* קומפקטי (לכן לא הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$) אבל לכל נקודה יש סביבה שהומיאומורפית ל $\mathbb{R}^n$ (ז"א T^n **<u>לוקלית</u>** הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$).

מ"ל עבור $n=1$ (מדוע ?)

מספר תכונות:

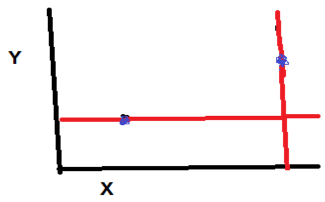
- אם γ_1 בסיס של X_1 ו γ_2 בסיס של X_2 אז $\gamma_1 \times \gamma_2 := \{O_1 \times O_2 : O_1 \in \gamma_1, O_2 \in \gamma_2\}$ בסיס של $X_1 \times X_2$.
- אם α_1 בסיס לוקלי של X_1 בנקודה x_1 ו α_2 בסיס לוקלי של X_2 בנקודה x_2 אז $\alpha_1 \times \alpha_2 := \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \alpha_1, U_2 \in \alpha_2\}$ בסיס לוקלי של $X_1 \times X_2$ בנקודה (x_1, x_2).
- אם A_1 צפוף ב X_1 ו A_2 צפוף ב X_2 אז $A_1 \times A_2$ צפוף ב $X_1 \times X_2$.
- $\{a\} \times X_2 \simeq X_2 \quad X_1 \times \{b\} \simeq X_1 \quad \forall a \in X_1, b \in X_2$

תרגילים מומלצים: (אם יהיה קשה ראו כאן)

1. $X \times Y \in B_2 \Leftrightarrow X, Y \in B_2$
2. $X \times Y \in B_1 \Leftrightarrow X, Y \in B_1$
3. $X \times Y \in Sep \Leftrightarrow X, Y \in Sep$

4. $X,Y \in Conn \Leftrightarrow X \times Y \in Conn$

רמז דרך התמונה:



הערה: תכונה טופולוגית נקראת "כפלית סופית" אם היא נשמרת לגבי מכפלה טופולוגית סופית.

5. $X \in T_2 \Leftrightarrow \Delta := \{(x,x) : x \in X\}$ סגור במרחב מכפלה $X \times X$.

6. לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} Y$ מתקיים ש

$$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) | x \in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}} \subset X \times Y.$$

7. אם $Y \in T_2$ ו $f : X \to Y$ רציפה אז הגרף $Gr(f)$ סגור ב $X \times Y$.

8. * Sorgenfrey plane $X := (\mathbb{R}, \tau_s) \times (\mathbb{R}, \tau_s)$ ספרבילי אבל מכיל תת מרחב לא ספרבילי.

9. $\mathbb{R} \setminus \{0\} \simeq \{1,2\} \times \mathbb{R}$

10. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S_1 \times \mathbb{R}$

11. נניח $\leq$ סדר ליניארי על קבוצה X ו $\tau_{\leq}$ טופולוגית הסדר

(עם פרה-בסיס $\alpha := \{(-\infty, b), (a, \infty) : a, b \in X\}$. ז"א $((\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau_{\leq}$)

הוכיחו:

א. $(X, \tau_{\leq}) \in T_2$

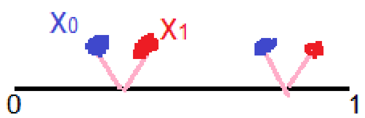
ב. יחס הסדר $\{(x,y) \in X \times X : x \leq y\}$ סגור במרחב מכפלה $X \times X$.

ג. אם $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq y_n, \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y$

אזי $x \leq y$.

12. (**שאלת אתגר**) בקבוצה $X := [0,1] \times \{0,1\}$ נגדיר Lexicographic Order

$$(a,b) \leq_L (c,d) \Leftrightarrow a < c \quad or \quad a = c, b \leq d$$



נדמיין "שהחלפנו" כל נקודה $x \in [0,1]$ בשתי נקודות x_0, x_1 עם הסדר $x_0 < x_1$

(כאשר מסמנים $x_0 := (x,0), x_1 := (x,1)$)

הוכיחו:

א. $(X, \tau_{\leq_L}) \in Sep \cap B_1 \cap T_2$.

ב. נקודות $(0,0), (1,1)$ הן מבודדות.

ג. $(X,\tau_{\le_L})$ מכיל תת מרחב שהומיאומורפי לקו סורגנפרי.

ד. $(X,\tau_{\le_L})$ לא מטריזבילי.

הערה 1.: למרחב $([0,1]\times\{0,1\},\tau_{\le_L})$ יש שמות שונים בספרות:

double arrow, split interval (לעיתים "מורידים" נקודות מבודדות)

הערה 2.: קיימות הכללות מעניינות וחשובות באישומים.

למשל: נניח $(K,\le)$ רבוצה עם סדר לינארי. לכל תת קבוצה $A\subseteq K$ אפשר להגדיר

קבוצה סדורה לנארית חדשה $K_A := K\times\{0\}\cup A\times\{1\}$ עם **סדר לקסיקוגרפי**.

אינטויטיבת זה המצב שמפצלים נקודות רק מהקבוצה A.

למשל: תבדקו שאם ניקח קבוצה סדורה $[0,1]_{\{\frac{1}{2}\}}$ (מפצלים רק נקודה אחת $\frac{1}{2}\in[0,1]$) אז נקבל מרחב

טופולוגי הומיאומורפי ל ("סכום" של שני קטעים סגורים)