

2. תהי $f \in E$ ויהי

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. חשב את

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x + \pi) - f(x)|^2 dx$$

במונחים של a_n ו- b_n .

4. תהי $f \in E$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. חשב את הסכום $I = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, כאשר נתון $f(x) = e^{-x}$.

1. תהי $f(x) = \begin{cases} Ax + B, & -\pi \leq x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$. עבור אילו ערכים של A ו- B יתכנס הטור פוריה של f במידה שווה בקטע $[-\pi, \pi]$?

1. תהי $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$, ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

א. חשב את a_n ו- b_n .

ב. הוכח שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx$ מתכנס לכל ערך של x .

ג. לכל x ממשי, נגדיר $g(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx$. שרטט במדויק את הגרף של g בקטע $[-2\pi, 2\pi]$.

ד. חשב את הסכומים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

3. תהי $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi}{4} - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ ויהי

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

הטור פוריה של f בקטע $[-\pi, \pi]$.

א. חשב את a_n ואת b_n .

ב. נגדיר $S(x) = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$. חשב את $S(x)$, לכל $-\pi < x < \pi$.

4. תהי f פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית 2π כך ש-

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

נגדיר $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

א. הוכח ש- g מחזורית 2π .

ב. יהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ הטור פוריה המרוכב של f בקטע $[-\pi, \pi]$ ויהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$ הטור פוריה המרוכב של g . הוכח שלכל x ממשי מתקיים השוויון

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$$

ושלכל n שלם מתקיים $d_n = \frac{c_n}{in}$.