משפט

ההעתקה $sign:S_n\to(\{\pm1\},\cdot,1)$ היא הומומורפיזם

הוכחה

נתייחס לקבוצה $P_n=\mathbb{Z}[x_1,...x_n]$ - קבוצת הפולינומים בn משתנים עם מקדמים שלמים. S_n פועלת על $P_n=\mathbb{Z}[x_1,...x_n]$ בצורה הבאה:
לכל פולינום $f(x_1,...x_n)\in P_n$ ותמורה $\pi\in S_n$ $\pi(f):=f\left(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},...x_{\pi(n)}\right)$

דוגמה $\pi\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\end{pmatrix}$, $f(x_1,...x_5)=2x_1^2x_2x_4-x_3^3x_2$,

$$\pi(f)=2x_2^2x_3x_5-x_1^3x_3$$

כלומר, S_n פועלת על P_n ע"י המרת האינדקסים.

עובדה 1 לכל שני פול. $f,g\in P_n$, $\pi\in S_n$:
$$\pi(f+g)=\pi f+\pi g$$
$$\pi(f\cdot g)=\pi(f)\cdot\pi(g)$$

עובדה 2 לכל $f\in P_n$, $\pi,\sigma\in S_n$, $\pi(\sigma(f))=(\pi\sigma)(f)$

נגדיר $\Delta_n:=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$. ברור $\Delta_n\in P_n$.

דוגמה $\Delta_3=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$

עובדה 3 לכל $\pi\in S_n$, $\pi(\Delta_n)=sign(\pi)\Delta_n$. הוכחה - השלם

דוגמה $\pi=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\pi\Delta_3=(x_1-x_2)(x_3-x_2)(x_3-x_1)=-\Delta_n=(-1)^{inv(\pi)}\Delta_n$

עבור כל זוג $\pi,\sigma\in S_n$ נחשב את

$$\pi(\sigma(\Delta_n))=\pi(sign(\sigma)\Delta_n)=\pi(sign(\sigma))\cdot\pi(\Delta_n)$$

$$=sign(\sigma)\pi(\Delta_n)=sign(\sigma)sign(\pi)\Delta_n$$

$$=sign(\pi)sign(\sigma)\Delta_n$$

מאידך לפי עובדה 2:

$$\pi(\sigma(\Delta_n))=(\pi\sigma)(\Delta_n)=sign(\pi\sigma)\Delta_n$$

קיבלנו

$$sign(\pi\sigma)\Delta_n=sign(\pi)sign(\sigma)\Delta_n$$

$$\Rightarrow sign(\pi\sigma)=sign(\pi)sign(\sigma)$$

משפט

עבור $n>1$, העתקת הסימן $sign:S_n\to\mathbb{F}_3^*$ היא הומומורפיזם של חבורות.

הוכחה

העתקת הסימן היא הומ', הוכחנו. העתקת הסימן היא על:

$$sign\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}=1$$

$$sign\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

מסקנות לפי משפט האיז' הI

עבור $n>2$:

1. $A_n\trianglelefteq S_n$
2. ${}^{S_n}\!/_{A_n}\cong\mathbb{Z}_2$
3. $|A_n|=\dfrac{n!}{2}$

הוכחנו בשעור שעבר.

להלן נסיק:

דרך קצרה לבדוק אם תמונרה נתונה זוגית.

עובדה 1

לכל חילוף $\tau=\begin{pmatrix}i & j\end{pmatrix}$, $sign\tau=-1$

הוכחה

$$\tau=\begin{pmatrix}i & j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots\\ 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots\end{pmatrix}$$

מיהם ההיפוכים של τ?(הערה - $\coprod$ זה סימן לאיחוד זר)

$$Inv(\tau)=\left\{\begin{pmatrix}i & k\end{pmatrix}:i+1\le k\le j-1\right\}\coprod\left\{(k,j):i+1\le k\le j-1\right\}\coprod\left\{(i,j)\right\}$$

לכן

$$inv\left(\tau\right)=2\left(j-1-i\right)+1=2\left(j-i\right)-1$$

היפוך הוא זוג $i<j$ כך ש$\pi\left(i\right)>\pi\left(j\right)$ ולכן

$$sign\left(\tau\right)=\left(-1\right)^{inv(\tau)}=\left(-1\right)^{2(j-i)-1}=-1$$

מסקנה 2

לכל $\pi\in S_n$ וחילוף τ, $sign\left(\tau\pi\right)=-sign\left(\pi\right)$

הוכחה

המשפט מראשית השעור+עובדה 1 ■

מסקנה 3

יהי γ מחזור. $sign\left(\gamma\right)=\begin{cases}1 & \left|\gamma\right|\,is\,even\\-1 & \left|\gamma\right|\,is\,odd\end{cases}$

הוכחה

נניח γ מאורך k. כלומר $\gamma=\left(a_1,a_2,...a_k\right)$. הראנו

$$\gamma=\left(a_1,a_2\right)\left(a_2,a_3\right)\cdots\left(a_{k-1},a_k\right)=\prod_{i=1}^{k-1}\left(a_i,a_{i+1}\right)$$

$$sign\gamma=sign\prod_{i=1}^{k-1}\left(a_i,a_{i+1}\right)=\prod_{i=1}^{k-1}sign\left(a_i,a_{i+1}\right)=\left(-1\right)^{k-1}$$

משפט

תמורה היא אי-זוגית אמ"ם מס' המחזורים הזוגיים בה הוא אי זוגי.

הוכחה

השלם.