הגדרה

יהי R חוג. $Z(R)=\{x\in R|\forall_{y\in R}yx=xy\}$ - האיברים שמתחלפים יחס לכפל.
$Z(R)$ הוא תת חוג של R.

חיתוך של תת־חוגים

R חוג, לכל $\alpha\in\Lambda$, $R_\alpha\subseteq R$ תת־חוג. אזי, $\bigcap R_\alpha$ תמיד תת־חוג.

דוגמאות לחוגים

- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}_n$ - השלמים עם חיבור וכפל מודולו n
- בכל חוג R, $R_0=\{$סכומים של 1ים$\}$ איזומורפי ל$\mathbb{Z}$ או ל$\mathbb{Z}_n$ עבור n כלשהו.

קבוצת יוצרים

נניח שR חוג וR_0 תת־חוג המוכל ב$Z(R)$. תהי $S\subseteq R$ תת קבוצה של R. נתבונן בקבוצה:
$R_0[S]=\bigcap\{R'|S$ ואת R_0 המכיל את R תת־חוג של $R'\}$
קבוצה זו נקראת "תת החוג הנוצר S". היא תת־חוג, כי היא חיתוך של תת־חוגים.

$$T=\left\{\sum\underbrace{\alpha_i}_{\in R_0}\cdot\underbrace{s_{i_1}\cdot s_{i_2}\cdots s_{i_n}}_{\in S}\right\}\subseteq R$$

זה תת חוג, ולכן הוא שווה ל$R(s)$.
כל תת חוג R' המכיל את R_0 ואת S מכיל את T. מכיוון שT תת־חוג, הוא משתתף בחיתוך ולכן שווה לו.

הגדרה

S יוצר את R אם $R=R_0[S]$.

נניח שS יוצר את R.
$Z(R)=\{z\in R|s\in S$ מתחלף עם כל $z\}$

בניה של חוגים

1

נניח שR חוג. לכל $1 \leq n$ אפשר להתבונן ב

$$M_n\left(R\right)=\left\{\left.\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\right|a_{ij}\in R\right\}$$

עם החיבור והכפל הרגילים, למשל:

$$\left(a_{ij}\right)\left(b_{ij}\right)=\left(\sum a_{ik}b_{kj}\right)$$

$1_n=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$ איבר יחידה.

$M_n\left(R\right)$ זה חוג.

מסמנים i $e_{ij}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j & \end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & | & 0\\ - & 1 & -\\ 0 & | & 0\end{pmatrix}\end{array}$, ($e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$)

$M_n\left(R\right)=\left\{\left.\sum_{ij}a_{ij}e_{ij}\right|a_{ij}\in R\right\}\Leftarrow M_n\left(R\right)$ נוצר(מעל R) על ידי $\{e_{ij}\}$

בעיה מהו $Z\left(M_n\left(R\right)\right)$? מתי $a=\sum a_{ij}e_{ij}$ מתחלפת עם $e_{\alpha\beta}$?

$$a\cdot e_{\alpha\beta}=\sum a_{ij}e_{ij}e_{\alpha\beta}=\sum_i a_{i\alpha}e_{i\beta}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \beta & \\ & \downarrow & \end{array}\\ \begin{pmatrix} & a_{1\alpha} & \\ 0 & \vdots & 0\\ & a_{n\alpha} & \end{pmatrix}\end{array}$$

$$e_{\alpha\beta}\cdot a=\sum e_{\alpha\beta}a_{ij}e_{ij}=\sum_j a_{\beta j}e_{\alpha j}=\begin{pmatrix} & 0 & \\ a_{\beta1} & \cdots & a_{\beta n}\\ & 0 & \end{pmatrix}\leftarrow\alpha$$

נסכם

- a מתחלף עם $e_{\alpha\beta}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{l}\forall_{i\neq\beta}a_{i\alpha}=0\\ \forall_{j\neq\alpha}a_{\beta j}=0\\ a_{\alpha\alpha}=a_{\beta\beta}\end{array}$
- a מתחלפת עם כל $e_{\alpha\beta}(\alpha\neq\beta)$ $\Leftrightarrow$ a סקלרית

כלומר מטריצה שרוצה להיות במרכז צריכה להיות סקלרית.

נניח ש־a סקלרית, כלומר $a = a_0 \cdot 1_n$, $a_0 \in R$.
מתי a מתחלפת עם <u>כל</u> $b = b_0 \cdot 1_n$, $b_0 \in R$?

$$\Leftrightarrow \qquad a_0 \in Z(R)$$

$$\Leftarrow \qquad Z(M_n(R)) \subseteq \{a_0 \cdot 1_n | a \in Z(R)\}$$

תרגיל: $$Z(M_n(R)) \supseteq \{a_0 \cdot 1_n | a \in Z(R)\}$$

ולכן יש שוויון.

2

יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V)$[1] זה חוג.
אם $V \cong \mathbb{F}^n$, $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \cong M_n(\mathbb{F})$.

3

תהי A חבורה אבלית.
$\mathrm{End}(A) = \mathrm{Hom}(A, A)$[2] חוג.

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$

$$(f \cdot g)(a) = f(g(a))$$

הערה

$$\left\{T : V \to V \middle| \begin{array}{c} T(x+y) = T(x) + T(y) \\ T(\alpha x) = \alpha T(x) \end{array} \right\} = \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) \subseteq \mathrm{End}(V) = \{T : V \to V | T(x+y) = T(x) + T(y)$$

4

יהי R חוג

$$R[\lambda] = \left\{a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n \middle| \begin{array}{c} a_i \in R \\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{array} \right\}$$

---

[1] $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}$ ו־$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}$ מסמנים אנדומורפיזם והומומורפיזם של מרחבים וקטורים מעל שדה $\mathbb{F}$

[2] End ו־Hom מסמנים אנדומורפיזם והומומורפיזם של חבורות

עם חיבור וכפל של פולינומים

$$\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}b_j\lambda^j\right)=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)\lambda^k$$

$0_{R[\lambda]}=0_R$ איבר האפס, $1_{R[\lambda]}=1_R$.
מתקבל חוג: $Z(R[\lambda])=(Z(R))[\lambda]$

- (אם $S\subseteq R$ (תת חוג) אז $S[\lambda]\subseteq R[\lambda]$(תת חוג))

$$M_n(R[\lambda])\cong(M_n(R))[\lambda]$$

כלומר כל מטריצה של פולינומים אפשר לתרגם לפולינום של מטריצות, למשל, $\begin{pmatrix}1+\lambda & \lambda\\ 2+\lambda^2 & 0\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\lambda^2$$

- אפשר להגדיר $\deg:R[\lambda]\to\mathbb{N}\cup\{-\infty\}$, $\deg\left(\sum a_i\lambda^i\right)=\max_n\{a_n\neq 0\}$, $\deg(0)=-\infty$.

תכונות:

- $\deg(f+g)\le\max(\deg f,\deg g)$
- $\deg(fg)\le\deg f+\deg g$
  * זה "קטן-שווה" ולא "שווה" כי במקרה של מטריצות, למשל,

$$\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\lambda\right)^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\lambda^2=0$$

$$\deg\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\lambda\right)^2=0\neq 2=2\deg\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)$$

  * אם R תחום אז מתקבל תמיד שוויון.

הערה

יהי R תחום.
$f\in R[\lambda]$ הפיך $\Leftrightarrow$ $f\in R$ והפיך שם.

הוכחה

אם f הפיך אז קיים g כך ש $fg=1$, ואז

$$0=\deg fg=\deg f+\deg g=0+0$$

5 - אלגברת הקווטרניונים

קצת היסטוריה:

- בהתחלה היו מספרים טבעיים $\mathbb{N}$
- אחרי זה, רצו גם שליליים, אז המציאו את המספרים השלמים $\mathbb{Z}$
- אחרי זה, רצו גם חצאים וכו', אז המציאו את המספרים הרציונלים $\mathbb{Q}$
- אחרי זה, הבינו(וזה לא טריוויאלי) ש$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
- כדי שיהיו שורשים לכל הפולינומים, המציאו את $\mathbb{C}$
- באמצעות $\mathbb{C}$ ניתן להכפיל זוגות של מספרים. המתמטיקאי המילטון רצה להכפיל שלשות - אבל זה בלתי אפשרי - אבל אפשר להכפיל רביעיות של מספרים, באמצעות הקווטרניונים - $\mathbb{H}$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$$

נגדיר $\begin{matrix} t:\mathbb{C}\to\mathbb{R} \\ n:\mathbb{C}\to\mathbb{R} \end{matrix}$ לפי $\begin{matrix} t(z)=z+\bar{z} \\ n(z)=z\bar{z} \end{matrix}$.

$$z^2 - t(z)\,z + n(z) = 0$$

אם $z = x + iy \neq 0$ אז $n(z) = x^2 + y^2 > 0$

$$z \cdot (z - t(z)) = -n(z)$$

עד כאן - נשארנו ב$\mathbb{C}$.

נגדיר $\mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}j$ - זהו מ"ו ממימד 2 מעל $\mathbb{C}$, או מ"ו ממימד 4 מעל $\mathbb{R}$

$$(x+yj)(x'+y'j) = \left(xx' - y\overline{y'}\right) + \left(xy' + y\overline{x'}\right)j$$

$$j \cdot i = -ij$$

נגדיר "צמוד" $\bar{\cdot}:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ ע"י $\overline{x+yj} = \overline{x} - yj$.

תכונות:

- $\overline{w+w'} = \overline{w} + \overline{w'}$
- $\overline{\overline{w}} = w$
- $\overline{ww'} = \overline{w'}\,\overline{w}$

נגדיר $\begin{matrix} T:\mathbb{H}\to\mathbb{R} \\ N:\mathbb{H}\to\mathbb{R} \end{matrix}$ לפי $\begin{matrix} T(w)=w+\overline{w} \\ N(w)=w\overline{w} \end{matrix}$

$$\left(\begin{matrix} w=a+bi+cj+dij\neq 0 \\ T(w)=2a \\ N(w)=a^2+b^2+c^2+d^2>0 \end{matrix}\right)$$

כמו קודם, $w^2-T(w)\,w+N(w)=0$

מכיוון שלכל $w\neq 0$, $N(w)\neq 0$, כל ה$w\neq 0$ הפיך ב$\mathbb{H}$. לכן זה חוג עם חילוק