נגזרות חלקיות מסדר גבוה

אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ פונ' גזירה חלקית לפי משתנה x_i(כלומר f'_{x_i} קיימת) אז אפשר לגזור אותה חלקית לפי כל אחד מהמשתנים $x_1,...x_n$. נסמן: הנגזרת החלקית מסדר 2 לפי משתנה x_i ואח"כ לפי משתנה x_j ע"י $f_{x_ix_j}$ או $\frac{d^2f}{dx_idx_j}$

דוגמה 1

מצאו נגזרות חלקיות מסדר שני של הפונקציה $f\left(x,y\right)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

פתרון

$$f'_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\quad f'_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

עבור סדר שני יש 3 אפשרויות:

$$\left(f'_x\right)'_x=\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'=\frac{2\left(y^2+x^2\right)-2x\left(2x\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

באופן דומה

$$\left(f'_y\right)'_y=\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'=\frac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

נשים לב שהנגזרות הנוספות מסדר 2 הן $\left(f'_x\right)'_y$, $\left(f'_y\right)'_x$. נציב:

$$f''_{yx}=\left(f'_y\right)'_x=\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=f''_{xy}$$

מישור משיק לפונקציה

תהי $f\left(x,y\right)$ פונ' $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. משוואת המישור המשיק ל$f$ בנקודה (x_0,y_0)היא

$$(*)\;z-f\left(x_0,y_0\right)=f'_x\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+f'_y\left(x_0,y\right)\left(y-y_0\right)$$

וקטור הנורמל למישור זה בנק. $\left(x_0,y_0,f\left(x_0,y_0\right)\right)$ הוא

$$\vec{N}=\left(f'_x\left(x_0,y_0\right),f'_y\left(x_0,y_0\right),-1\right)\quad(1)$$

לדוגמה

תהי $f\left(x,y\right)=x^{2}+y^{2}$. מצא משוואת המישור המשיק ואת הנורמל למישור בנק.

א) $(1,2)$

ב) $(0,0)$

פתרון

משוואת המישור המשיק לפי $(*)$:

א)

$$z-f\left(1,2\right)=f'_{x}\left(1,2\right)\left(x-1\right)+f'_{y}\left(y-2\right)$$

$$z-f\left(1,2\right)=2\left(x-1\right)+4\left(y-2\right)$$

$$f\left(1,2\right)=5$$

$$\Downarrow$$

$$z-5=2x-2+4x-8$$

$$\boxed{z=2x+4y-5}$$

עבור הנורמל:

$$\vec{N}=\left(f'_{x}\left(1,2\right),f'_{y}\left(1,2\right),-1\right)$$

$$\boxed{\vec{N}=\left(2,4,-1\right)}$$

ב)

$$z-f\left(0,0\right)=f'_{x}\left(0,0\right)\left(x-0\right)+f'_{y}\left(0,0\right)\left(y-0\right)$$

$$z-0=0$$

$$\boxed{z=0}$$

$$\vec{N}=\left(f'_{x}\left(0,0\right),f'_{y}\left(0,0\right),-1\right)=\boxed{\left(0,0,-1\right)}$$

כלל השרשרת

משפט

יהיו $\Omega_1 \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \in \mathbb{R}^m$ ויהיו $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ ו$g : \Omega_2 \to \mathbb{R}^2$ ותהי $h : \Omega_1 \to \mathbb{R}^2$ הפונ' הנ"ל: $h = g \circ f$. תהי $x_0 \in \Omega_1$ המקיימת $y_0 = f(x_0) \in \Omega_2$.

אם f גזירה(דיפרנציאבילית) בx_0 ואם g גזירה בy_0 אז h גזירה בx_0 ו $dhx_0 = dgy_0 \circ dfx_0$.

אם נסמן את מטריצת "$Jacobi$" של פונ' φ בנק. p ב$J\varphi p$ אז לפי המשפט

$$Jhx_0 = Jgy_0 \cdot Jfx_0$$

דוגמה

מצא את הנגזרות החלקיות ואת היעקוביאן של הפונ' $u = \left(\sin t, t^2\right)$ עבור $t = xyz$ לפי משתנים x, y, z

פתרון

נסמן $f(x, y, z) = xyz$ ולכן מתבקשת ההרכבה הבאה $u \circ f$. ידוע לפי כלל השרשרת שהנגזרת של $u \circ f$ שווה לנגזרת u כפול הנגזרת של f. לכן נמצא נגזרות חלקיות של f וu. ברור כי

$$u'_t = (\cos t, 2t)$$

$$f'_x = yz, f'_y = xz, f'_z = xy$$

ולכן

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & zx & xy \end{pmatrix}$$

$$Jut = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2t \end{pmatrix}$$

ולכן היעקוביאן של ההרכבה

$$Ju(x, y, z) = Ju \cdot Jf = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} yz & zx & xy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} yz\cos(xyz) & zx\cos(xyz) & xy\cos(xyz) \\ 2(xyz)(yz) & 2(xyz)(zx) & 2(xyz)(xy) \end{pmatrix}$$

מקרה פרטי של כלל השרשרת

תהי $u=f\left(x,y,z\right)$ בעלת נגזרות חלקיות f'_{x},f'_{y},f'_{z} רציפות ויהיו $x=x\left(t\right)$, $y=y\left(t\right)$, $z=z\left(t\right)$ פונ' גזירות. אז קיימת הנגזרת $\frac{du}{dt}$ ומתקיים

$$\frac{du}{dt}=f'_{x}\cdot\frac{dx}{dt}+f'_{y}\cdot\frac{dy}{dt}+f'_{z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

דוגמה

חשבו $\frac{du}{dt}$ של הפונקציה $u=xy$ כאשר $x=f\left(t\right)$, $\underline{y=g\left(t\right)}$

פתרון

לפי כלל השרשרת

$$\frac{du}{dt}=u'x\cdot\frac{dx}{dt}+u'y\cdot\frac{dy}{dt}=y\cdot f'\left(t\right)+xg'\left(t\right)$$

דיפרנציאל מסדר גבוה

משפט

תהי $f\in C^{n}$ (הפונ' בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר n), אז סדר הגזירה החלקית של f לא משנה.
לדוגמה $f''_{xy}=f''_{yx}$

הגדרה(דיפרנציאל)

תהי $f\in C^{r}$. הדיפרנציאל מסדר r של f בנק. a הוא

$$d^{r}f_{a}\left(h\right)=\sum_{|\alpha|=1}^{r}\frac{r!}{\alpha!}D^{\alpha}f\left(a\right)\cdot h^{\alpha}$$

עבור h וקטור וα מולטי-אינדקס.

לדוגמה

חשבו את $d^{2}f$ בכל נק. עבור $f\left(x,y,z\right)=xyz$

פתרון

נמצא את הנגזרות מסדר ראשון ושני(כי ביקשו d^2f)

$$\begin{array}{l} f'_x = yz \Rightarrow f''_{xx} = 0 \\ f'_y = xz \Rightarrow f''_{yy} = 0 \\ f'_z = xy \Rightarrow f''_{zz} = 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''_{xy} = f''_{yz} = z \\ f''_{xz} = f''_{zx} = y \\ f''_{yz} = f''_{zy} = x \end{array} \right.$$

נשים לב שלפי ההגדרה הדיפרנציאל מסדר 2 עבור פונ' $f(x,y)$

$$df_{(a,b)}(h_1,h_2,h_3) = f''_{xx}(a,b)\cdot h_1^2 + 2f''_{xy}(a,b)\cdot h_1h_2 + f''_{yy}(a,b)\,h_2^2 +$$

$$+2f''_{xy}(a,b)\cdot h_1h_3 + 2f''_{zy}(a,b)\,h_2h_3 + f''_{zz}(a,b)\,h_3^2$$

$$= 0\cdot h_1^2 + 2zh_1h_2 + 2yh_1h_3 + 2xh_2h_3 + 0h_2^2 + 0h_3^2$$

בדרך לנוסחת טיילור

שימו לב כי אם נחלק בסדר הנגזרת את הדיפרנציאל נקבל מקדם של נוסחת טיילור. נראה זאת:

נוסחת טיילור

אם $f \in C^{r+1}$ של נק. φ_0 ניתן להציג את f כסכום של טור טיילור בנק. φ_0 ועוד שארית קטנה.

טור טיילור סביב נקודה φ_0 עם סדר r הוא:

$$P_r(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{i!} d^{(i)} p_0 (\vec{x} - p_0)^i$$

דוגמה

מצאו טור טיילור לפונקציה $f(x,y,z) = x^2 + 3z^2 - 2yz - 3z$ **סביב** הנקודה $(0,1,2)$

פתרון

מחפשים טור טיילור סביב $(0,1,2)$. נזכור כי טור טיילור הוא יחיד. נחפש פולינום סביב הנק. $(0,1,2)$.

איך נעשה זאת? נעזר בהצבות הבאות: $\left\{ \begin{array}{l} a = x - 0 \\ b = y - 1 \\ c = z - 2 \end{array} \right. \Leftarrow \begin{array}{c} x = a \\ y = b + 1 \\ z = c + 2 \end{array}$

$$f(x,y,z) = a^2 + 3(c+2) - 2(b+1)(c+2) - 3(c+2) = a^2 + 3c^2 - 2bc + 7c - 4b + 2$$

$$= x^2 + 3(z-2)^2 - 2(y-1)(z-1) + 7(z-2) - 4(y-1) + 2$$

ברור כי הפולינום הנ"ל סביב הנק. $(0,1,2)$, מיחידות טור טיילור, זהו הטור המבוקש.