תרגיל בית 3 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 26.11.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה ואם לא מצא דוגמא נגדית:

א. כל חבורה צקלית היא אבלית.

ב. כל חבורה אבלית היא צקלית.

ג. אם $o(a) = n$, אז $a^{-1} = a^{n-1}$.

שאלה 2. כתבו את לוחות הכפל של U_5, U_8. האם מדובר באותה חבורה (עד כדי שינוי שמות)?

שאלה 3. מצאו איבר מסדר 6 בחבורה S_5. רמז: מצאו איבר מסדר 2 ב-S_2 ואיבר מסדר 3 ב-S_3.

שאלות להגשה

שאלה 4. הזכרו בהגדרת פונקציית אוילר

$$\varphi(n) = |\{a \,|\, 0 \leq a < n,\ (a,n) = 1\}|$$

הוכיחו כי $(n,m) = 1$ אם ורק אם $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.
הדרכה: העזרו בפירוק לגורמים ראשוניים. אין צורך להשתמש במשפט השאריות הסיני.

שאלה 5. תהי G חבורה, ותהי $\varnothing \neq H \subseteq G$ תת־קבוצה לא ריקה.

א. הוכיחו שאם G חבורה סופית, אז כדי להוכיח ש-H היא תת־חבורה של G מספיק לבדוק סגירות לפעולה.

ב. הפריכו את הסעיף הקודם כאשר G אינסופית.

שאלה 6. תהי G חבורה ויהיו $a, b \in G$ איברים. הוכיחו כי $o(ab) = o(ba)$.
זהירות: לא הנחנו שהחבורה אבלית או שהסדרים סופיים.

שאלה 7. פתרו את המשוואות הבאות. כלומר מצאו כל $x \in \mathbb{Z}$ המקיים אותן, ולא רק אחד.

א. $33x \equiv 1 \pmod{218}$

ב. $-7x + 3 \equiv 9 \pmod{30}$

שאלה 8. לכל תמורה σ מהתמורות הבאות, כתבו את σ כמכפלת מחזורים זרים וחשבו את σ^2, את σ^{20} ואת $o(\sigma)$.

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 9 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$.

ב. $(1\,2)\,(2\,5\,4)\,(3\,1\,4)\,(1\,5) \in S_5$.

שאלה 9. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ויהי מחזור $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in S_n$. הוכיחו כי

$$\sigma a \sigma^{-1} = \sigma\,(a_1, a_2, \ldots, a_k)\,\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_k))$$

למשל, עבור $\sigma = (1\ 2)\,(4\ 5)$ ו-$a = (2\ 3\ 5\ 6)$ נקבל

$$\sigma\,(2\ 3\ 5\ 6)\,\sigma^{-1} = (1\ 3\ 4\ 6)$$

כרשות, האם אתם יכולים למצוא נוסחה עבור $\sigma a \sigma^{-1}$ כאשר a היא תמורה כלשהי?

שאלה 10. נתבונן ב-S_n עבור $n > 2$.

א. הוכיחו שלכל מחזור $\mathrm{id} \neq \tau \in S_n$ קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש-$\sigma\tau \neq \tau\sigma$. רמז: העזרו בשאלה הקודמת.

ב. הוכיחו כי $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 11. תהי G חבורה סופית. הוכיחו כי מספר האיברים מסדר 3 הוא זוגי (אולי אפס). מה לגבי מספר האיברים מסדר p כאשר p מספר ראשוני אי זוגי?

שאלה 12. מצאו חבורה אינסופית שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים בה איבר מסדר n. האם אתם יכולים גם להבטיח שהסדר של כל האיברים הוא סופי?

כמו כן, לכל $m > 1$ מצאו חבורה אינסופית G_m שהסדר של כל איבר בה הוא לכל היותר m.

האם אתם יכולים למצוא דוגמאות לשאלות האלו כך שהחבורות הן מעוצמה $\aleph_0$?

שאלה 13. כתבו תוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, כלומר מקבלת את השורה השנייה בהצגת תמורה כמטריצה בגודל $2 \times n$. התוכנה תחזיר בפלט את התמורה כמכפלת מחזורים זרים. הרחיבו את התוכנה כך שתקבל כמה תמורות, ותחזיר את מכפלתן כמכפלת מחזורים זרים.

בהצלחה!