פתרון בוחן בקורס מבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ט

הוראות כתבו באופן ברור שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
משך הבוחן: 90 דקות.
חומר עזר: מחשבון רגיל בלבד (וגם אותו לא צריך).

שאלה 1. (34 נק') יהי M מונואיד ויהיו $a, b \in M$. הוכיחו שאם האיבר aba הפיך, אז גם a ו-b הפיכים.

פתרון. יהי c ההופכי של aba. כלומר

$$abac = caba = e$$

לכן cab הוא הופכי שמאלי של a, ו-bac הוא הופכי ימני של a. בפרט a הפיך ומתקיים $cab = bac$. לכן מתקיים גם

$$(aca)b = a(cab) = a(bac) = e = (cab)a = (bac)a = b(aca)$$

וניתן להסיק כי aca הופכי שמאלי וימני של b.
שימו לב שלפני שידענו ש-a, b הפיכים לא יכולנו לכתוב $(aba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}a^{-1}$ או משהו דומה.

שאלה 2.

א. (17 נק') הוכיחו כי U_{12} היא לא ציקלית.

ב. (17 נק') הוכיחו כי $U_6 \times \mathbb{Z}_3$ היא ציקלית.

פתרון.

א. האיברים ב-U_n הם מחלקות שקילות של מספרים ששארית החלוקה שלהם ב-n היא זרה ל-n. תמיד אפשר לבחור נציגים למחלקות שהם טבעיים וקטנים מ-n.
אצלנו נקבל $U_{12} = \{1, 5, 7, 11\}$.
אילו U_{12} הייתה ציקלית, אז היה לה יוצר שחייב להיות מסדר $4 = |U_{12}|$. נחשב

את הסדר של כל האיברים: הסדר של 1 הוא 1 כי הוא איבר היחידה, הסדר של 5 הוא 2 כי $5^2 \equiv 25 \equiv 1 \pmod{12}$, הסדר של 7 הוא 2 כי $7^2 \equiv 49 \equiv 1 \pmod{12}$ והסדר של 11 הוא 2 כי $11^2 \equiv 121 \equiv 1 \pmod{12}$. לכן U_{12} אינה ציקלית.
החישוב של הסדר של 11 אינו הכרחי. הרי שאר האיברים הם מסדר שקטן מ-4, ואם אחד משאר האיברים היה יוצר, אז גם ההופכי שלו היה מסדר 4. דרך אחרת לחשב היא לשים לב כי $11 \equiv -1 \pmod{12}$ וקל לחשב $(-1)^2 = 1$.

ב. באופן דומה לסעיף הקודם $U_6 = \{1,5\}$. החבורה בסעיף זה היא מסדר $|U_6 \times \mathbb{Z}_3| = 2 \cdot 3 = 6$. ראינו שבכיתה אם חבורה מסדר 6 היא ציקלית, אז יש לה שני יוצרים. האיברים הם מן הצורה (a,b) כאשר $a \in U_6$ ו-$b \in \mathbb{Z}_3$.
ברור שלא כדאי לבחור $a = 1$ עבור היוצר, כי לא נוכל "להגיע" לאיבר 5. באופן דומה לא כדאי לבחור $b = 0$. מכאן קל לבדוק כי $(5,1)$ ו-$(5,2)$ הם היוצרים של החבורה. באופן מפורש, החזקות של $(5,1)$ הן

$$
\begin{array}{lll}
(5,1)^0 = (1,0) & (5,1)^1 = (5,1) & (5,1)^2 = (1,2) \\
(5,1)^3 = (5,0) & (5,1)^4 = (1,1) & (5,1)^5 = (5,2)
\end{array}
$$

שאלה 3. תהי $\sigma = (2\ 5\ 7)(4\ 2\ 3)(5\ 7)(3\ 4\ 1\ 6) \in S_8$.

א. (24 נק') מצאו את σ^3 ואת σ^{-1}.

ב. (10 נק') מצאו את כל איברי $\langle \sigma \rangle$.

פתרון.

א. כפי שראינו בכיתה, לכל תמורה יש ייצוג כמכפלת מחזורים זרים. חישוב זריז יגלה כי
$$\sigma = (1\ 6\ 4)(2\ 3\ 5)$$
וקל לראות כי $\sigma^3 = \mathrm{id}$. לכן $\sigma^{-1} = \sigma^2 = (1\ 4\ 6)(2\ 5\ 3)$.

ב. בסעיף הקודם גילינו כי $o(\sigma) = 3$. לכן ב-$\langle \sigma \rangle$ יש בדיוק שלושה איברים שכבר מצאנו אותם:
$$\langle \sigma \rangle = \left\{\mathrm{id}, \sigma, \sigma^2\right\} = \{\mathrm{id}, (1\ 6\ 4)(2\ 3\ 5), (1\ 4\ 6)(2\ 5\ 3)\}$$

בהצלחה!