24.07.24 תרגול 4 בס"ד

# תזכורת:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{Z-X_{n+1}}{(Z-X_n)^p}\right|=C$$

p-סדר התכנסות.

C-קבוע התכנסות.

**הערה** ניתן להעריך את p ו-C ע"י $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{X_{n+1}-X_n}{(X_n-X_{n-1})^p}\right|=C$

נסמן $e_{n+1}=X_{n+1}-X_n$ אז

אם:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right|=C_1>0$$

אז ההתכנסות לינארית.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}\right|=C_2>0$$

אז ההתכנסות ריבועית.

**תרגיל 1** נתון כי הסדרה $\{a_n\}$ המתקרבת לשורש מסוים $\gamma$ מקיימת $\frac{e_{n+1}}{e_n}=A$ , $A=2/3$

כאשר $e_n=|\gamma-a_n|$

(1) האם הסדרה מונוטונית ל- $\gamma$? אם כן-מהו סדר ההתכנסות.

(2) תן ביטוי לשגיאה כתלות ב- n ובשגיאה ההתחלתית $e_0$. $e_n=f(n,e_0)$

מה ניתן לומר על ביטוי השגיאה כאשר $A<1$?

**פתרון** (1)

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=\frac{2}{3}\xrightarrow{n\to\infty}\boxed{\frac{2}{3}}<1$$

ולכן ע"פ הגדרת סדר התכנסות, $p=1$. וההתכנסות לינארית

(2) $e_n=A\cdot e_{n-1}=A^2\cdot e_{n-2}=A^3\cdot e_{n-3}=\ldots$

$$=\boxed{A^n\cdot e_0}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot e_0\xrightarrow{n\to\infty}0$$

(אם $A>1$ אז הסדרה לא הייתה מתכנסת).

השגיאה קטנה באופן מעריכי. (התכנסות לינארית).

**תרגיל 2** נתון כי הסדרה $\{e_n\}$ המתקרבת לשורש מסוים $\alpha$ מקיימת

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = A$$

כאשר $A$ קבוע חיובי כלשהו. מהו סדר ההתכנסות?
תן ביטוי לשגיאה כפונקציה של $n$, $A$ ו- $e_0$.

**פתרון** סדר ההתכנסות ריבועי:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} \xrightarrow{n\to\infty} A$$

$$e_n = A\cdot e_{n-1}^2 = A\cdot(A\cdot e_{n-2}^2)^2 = A^{1+2}\cdot e_{n-2}^4 =$$

$$= A^{1+2}(A\cdot e_{n-3}^2)^4 = A^{1+2+4}\cdot e_{n-3}^8 = \ldots$$

$$\ldots = A^{\underline{1+2+4+\ldots+2^{n-1}}}\cdot e_0^{2^n}$$

סדרה הנדסית

$$\left.\begin{matrix} q=2 \\ a_1=1 \end{matrix}\right\} \quad \frac{1(2^n-1)}{2-1} = 2^n - 1$$

$$\Rightarrow e_n = A^{2^n-1}\cdot e_0^{2^n} = \boxed{\frac{(A\cdot e_0)^{2^n}}{A}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

נדרוש $|A\cdot e_0| < 1$. והשגיאה היא פונקציה של קבוע בחזקת $2^n$.

**תרגיל 3** נתונות סדרות של שגיאות של 2 שיטות למציאת שורשים של משוואה לא לינארית:

שיטה א': $16384, 4096, 1024, 256, 64, \ldots$

שיטה ב': $16384, 268.4355, 0.0701, 0.519\cdot 10^{-8}$

מה ניתן לומר על סדר ההתכנסות של כל אחת מהשיטות הנ"ל?

**פתרון** שיטה א':

$$\frac{e_1}{e_0} = \frac{e_2}{e_1} = \frac{e_3}{e_2} = \frac{e_4}{e_3} = \ldots = \frac{1}{4} < 1$$

ולכן ההתכנסות לינארית.

שיטה ב':

$$\frac{e_1}{e_0^2}=\frac{e_2}{e_1^2}=\frac{e_3}{e_2^2}=\frac{e_4}{e_3^2}=\_\_\_=10^{-6}$$

**תרגיל 4:** השגיאה של שיטה למציאת שורשים של משוואה לא לינארית נתונה ע"י הביטוי

$$e_n=\frac{\ln(n^2+3n)}{3^n}$$

מהו סדר ההתכנסות של שיטה זו?

**פתרון:** כיוון ש- $a_n$ מתנהגת כמו פונקציה מעריכית, נבדוק אם ההתכנסות לינארית:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n}=\frac{\ln((n+1)^2+3(n+1))}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{\ln(n^2+3n)}=\frac{1}{3}\frac{\ln((n+1)^2+3(n+1))}{\ln(n^2+3n)}$$

נשתמש בלופיטל $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim\frac{e_{n+1}}{e_n}=\frac{1}{3}\lim\frac{\frac{2n+5}{(n+1)^2+3(n+1)}}{\frac{2n+3}{n^2+3n}}=\frac{1}{3}\lim\frac{(2n+5)(n^2+3n)}{(2n+3)((n+1)^2+3(n+1))}=$$

$$=\boxed{\frac{1}{3}}<1$$

ולכן סדר ההתכנסות לינארי!

## שיטת Regula-Falsi:

כמו בשיטת החציה נתחיל עם קטע $[x_0,x_1]$ כך ש- f רציפה בקטע ומתקיים $f(x_0)\cdot f(x_1)<0$

כעת, אם נעביר מיתר, בהנחה שהפונקציה לא מתנהגת בצורה מוזרה נצפה שנקודת החיתוך של המיתר עם ציר ה- x תהיה קרובה לשורש הפונקציה.

הנוסחה:

$$x_2=x_1-f(x_1)\cdot\frac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}$$

ונמשיך עם הקטע המתאים שמחליף סימן.

כפ"ה **יתרונות וחסרונות:**

כמו בשיטת החציה, ברוב המקרים שיטה זו מהירה יותר.

## שיטת נקודת השבת:

נחליף את המשוואה $f(x)=0$ במשוואה:

$x=g(x)$ כך שאם $z$ הוא שורש של $f(x)$ אז מתקיים

$g(z)=z$ (ולהפך)

נגדיר את סדרת האיטרציות $x_{n+1}=g(x_n)$

**דוגמא:** מצא סדרת איטרציות בשיטת נקודת שבת לפונקציה

$f(x)=x^3-5x^2+e^x$

**פתרון:**

(1) $x^2(x-5)=-e^x$

$$\boxed{x=-\frac{e^x}{x(x-5)}}$$

(2) $x^3=5x^2+e^x$

$$\boxed{x=\frac{5x^2+e^x}{x}}$$

**משפט:** תנאי להתכנסות המוגדרת ע"י הפונקציה $g(x)$ הוא כאשר $|g'(x)|<1$ בסביבה של הפתרון.

**הערה:** ככל ש- $|g'(x)|$ יהיה קטן יותר, כך ההתכנסות תהיה מהירה יותר.

**תרגיל:** ברצוננו לפתור את הבעיה הבאה $x+\ln x=0$

שהפתרון שלה $\alpha\approx0.5$. נתונות הנוסחאות האיטרטיביות הבאות:

(א) $x_{n+1}=-\ln x_n$

(ב) $x_{n+1}=e^{-x_n}$

(ג) $x_{n+1}=\frac{x_n+e^{-x_n}}{2}$

באיזו מן הנוסחאות אפשר להשתמש להתכנסות השורש, ובאיזו הכי כדאי להשתמש?

בס"ד

**פתרון:** (א) נבחר $g(x)=-\ln x$

$$|g'(x)| = \left|-\frac{1}{x}\right| \sim 2 > 1$$

ולכן איטרציה זו לא תתכנס.

(ב) נבחר $g(x)=e^{-x}$

$$|g'(x)| = |-e^{-x}| \approx 0.6 < 1$$

והאיטרציה זו תתכנס.

(ג) נסמן $g(x)=\frac{x+e^{-x}}{2}$

$$|g'(x)| = \left|\frac{1-e^{-x}}{2}\right| \approx 0.2 < 1$$

שיטה זו תתכנס, והיא עדיפה משיטה ב'.

**משפט:** תהי $x_{n+1}=g(x_n)$ נוסחה איטרטיבית שמתכנסת ל- $z$ המקיים $g(z)=z$, רק ש- $g(x)$ גזירה $p$ פעמים בסביבה של- $z$

$$\begin{cases} g'(z)=g''(z)=\dots=g^{(p-1)}(z)=0 \\ g^{(p)}(z)\neq 0 \end{cases}$$

אזי עבור $x$ קרוב ל- $z$, סדר ההתכנסות של השיטה הוא $p$, וקבוע ההתכנסות:

$$C=\frac{|g^{(p)}(z)|}{p!}$$

**תרגיל:**

נתונה הפונקציה $f(x)=x^3+2x-3$

א. מצא איטרציה שמתכנסת עבור השורש 1, ומצא את סדר וקבוע ההתכנסות

**פתרון:**

$$x^3+2x-3=0$$

$$2x=3-x^3$$

$$x=\frac{3-x^3}{2}$$

נבחר: $g(x)=\frac{3-x^3}{2}$

$$g'(x)=-\frac{3x^2}{2}$$

$$g'(1)=\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}>1$$

בס״ד

$$p=1 \quad (g'(z)\neq 0)$$

$$c=\frac{g'(z)}{1}=\frac{3}{2}>1$$

והשיטה מתבדרת.

$$x(x^2+2)=3 \Rightarrow x=\frac{3}{x^2+2}$$

$$g(x)=\frac{3}{x^2+2}$$

$$g'(x)=3\cdot\frac{-2x}{(x^2+2)^2}\bigg|_{x=1}=-\frac{2}{3}$$

$$p=1\ ;\ c=2/3$$

התכנסות ליניארית.

ב. מצאו את הסדר וקבוע לאותה פונקציה עבור משוואת האיטרציה הבאה:

$$\varphi(x)=\frac{2x^3+3}{3x^2+2}$$

**פתרון:**

$$\varphi'(x)=\frac{6x^2(3x^2+2)-6x(2x^3+3)}{(3x^2+2)^2}=\frac{6x^4+12x^2-18x}{(3x^2+2)^2}\bigg|_{x=1}=0$$

$$\varphi''(x)=\frac{(24x^3+24x-18)(3x^2+2)^2-2(3x^2+2)\cdot 6x(6x^4+12x^2-18x)}{(3x^2+2)^4}=\frac{30}{25}$$

$$p=2$$

$$c=\frac{|\varphi''(1)|}{2!}=\frac{30}{25\cdot 2}=\boxed{\frac{3}{5}}$$

## שיטת המיתר

בדיוק כמו Regula Falsi אך ללא שימוש בקטע מחליפי סימן.

מתחילים עם שתי נקודות $x_0, x_1$ (שלא ~~בהכרח~~ בהכרח מקיימות $f(x_0)\cdot f(x_1)<0$) רק ש-$x_1$ קרוב יותר לשורש ($|f(x_1)|<|f(x_0)|$). ותקדם עפ"י הנוסחה:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

בשיטה זו סדר ההתכנסות הוא סופר לינארי $p\approx 1.6$

**חיסרון:** לא תמיד מתכנס.

**יתרון:** אם מתכנסת - מהירה.

## שיטת ניוטון רפסון

**הרעיון:** שבמקום שבמקום להעביר מיתר - נעביר משיק.

נבחר נקודה $x_0$ ונתקדם ע"פ הנוסחה

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

**יתרונות:** (1) התכנסות ריבועית $p=2$.

(2) צריך לבחור רק נקודה אחת

(3) אפשר להכליל להרבה מימדים.

**חסרונות:** (1) חישוב הנגזרת עלול להיות מסובך.

(2) הנגזרת עלולה להתאפס.

**דוגמא:** מצא את $\sqrt[3]{4}$ בשיטת ניוטון רפסון עם דיוק של $10^{-7}$, בהנחה שאנו לא יודעים מה הערך המדויק. נבחר $x_0=2$

$$f(x) = x^3-4$$

**פתרון:**

$$x_{n+1}-x_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x^3-4}{3x^2}$$

$$\varepsilon_n = x_n - x_{n-1}$$

$x_0=2$

$x_1 = 2 - \frac{8-4}{3\cdot 4} = \frac{5}{3}$ $\quad \varepsilon_1 = \frac{1}{3} > 10^{-7}$

$$x_2 = \frac{5}{3} - \underbrace{\frac{x_1^3 - 4}{3x_1^2}}_{\varepsilon_2 = 0.075556 > 10^{-7}} = 1.5911107$$

$$x_3 = 1.5911107 - \overbrace{3.70 \cdot 10^{-3}}^{\varepsilon_3 > 10^{-7}} = 1.5874097$$

$$x_4 = 1.5874 - \underbrace{867 \cdot 10^{-6}}_{\varepsilon_4} = 1.5874010$$

$$x_5 = 1.5874010 - \underbrace{0.052 \cdot 10^{-7}}_{< 10^{-7}} = 1.58740$$

**תרגיל:** פתור את המשוואה $x-2\sin x=0$ בשיטת נקודת השבת עבור $\varphi(x)=2\sin x$ ובשיטת ניוטון רפסון, והערך את סדר וקבוע ההתכנסות בשתי השיטות. עבור ניוטון רפסון בצע חישובים עם 20 ספרות משמעותיות. בשני המקרים השתמש ב- $x_0=\pi/2$.

**פתרון:** בשני המקרים נבצע איטרציות כל עוד הספרות משתנות, נחשב את היחס $\varepsilon_n/\varepsilon_{n-1}$ ואם נראה שהתוצאה אינה מתכנסת נחשב גם את $\varepsilon_n/\varepsilon_{n-1}^2$ וכו, עד שנקבל סדרה מתכנסתץ נרכז את החישובים בטבלה.

על פי שיטת נקודת השבת $\varphi(x)=2\sin x$ :

| iteration number | $x_n$ | $\varepsilon_n$ | $x_{n+1}-x_n$ | $\varepsilon_n/\varepsilon_{n-1}$ | $\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}-x_{n-2}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.5707963267949 | 0.32469886951341 | | | |
| 1 | 2 | 0.104504803691693 | 0.429203673205103 | 0.321851455313974 | |
| 2 | 1.81859485365136 | 0.0769003426569435 | 0.181405146348637 | 0.735854620461395 | 0.422655158083767 |
| 3 | 1.93890945306856 | 0.0434142567602496 | 0.120314599417193 | 0.564552188719404 | 0.663236968955469 |
| 4 | 1.86601601636051 | 0.0294791799477996 | 0.0728934367080492 | 0.679020721478548 | 0.605856953862181 |
| 5 | 1.91347649344167 | 0.0179812971333648 | 0.0474604770811644 | 0.609965988375705 | 0.65109396983506 |
| 6 | 1.88371495915469 | 0.0117802371536178 | 0.0297615342869826 | 0.655138339923163 | 0.627080385982762 |
| 7 | 1.90287832191698 | 0.00738312560867116 | 0.0191633627622889 | 0.626738283142608 | 0.643897004015374 |
| ... | | | | | |
| 27 | 1.89549519630831 | | | | |

סדר ההתכנסות שווה 1,
קבוע התכנסות – בערך 0.63.

עבור שיטת ניוטון רפסון: $\varphi(x) = x - \dfrac{x - 2\sin x}{1 - 2\cos x}$, ונקבל:

| $n$ | $x_n$ | $\varepsilon_n$ | $\varepsilon_n / \varepsilon_{n-1}$ | $\varepsilon_n / \varepsilon_{n-1}^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | |
| 2 | 1.9009955942039090362 | 0.104506 | | |
| 3 | 1.895511645379594697 | 0.00550133 | 0.05264 | 0.5037 |
| 4 | 1.895494267208713198 | 0.0000173783 | 0.0031589 | 0.5742 |
| 5 | 1.895494267033980947 | $1.74732 \cdot 10^{-10}$ | 0.00001005 | 0.5785 |

כאן סדר ההתכנסות הוא 2 וקבוע ההתכנסות הוא בערך 0.58.

<u>הערה</u>: בשני המקרים לא מצאנו את סדר ההתכנסות ואת קבוע ההתכנסות אלא קירבנו אותם.