תרגיל 1

חוג S (לא קומוטטיבי) הוא חוג ראשוני למחצה אם אין לו אידיאלים $0 \neq I \lhd S$ שריבועם $I^2 = 0$. אידיאל $P \lhd R$ הוא אידיאל ראשוני למחצה אם R/P הוא חוג ראשוני למחצה.

א. כל אידיאל ראשוני הוא ראשוני למחצה.

ב. $P \lhd R$ הוא ראשוני למחצה אם ורק אם (לכל $I \lhd R$, $I^2 \subseteq P$ גורר $I \subseteq P$)

ג. $P \lhd R$ הוא ראשוני למחצה אם ורק אם (לכל $a \in R$, אם $aRa \subseteq P$ אז $a \in P$)

פתרון

א.

יהי $P \lhd R$ אידיאל ראשוני ז"א לכל שני אידיאלים $A, B \lhd R$ כך ש $AB \subseteq P$ אזי $A \subseteq P$ או $B \subseteq P$. נניח בשלילה ש R/P הוא אינו חוג ראשוני למחצה, ז"א קיים $0 \neq I \lhd R/P$ כך ש $I^2 = 0$. יהיו $a+P, b+P \in I$ כך ש $a, b \notin P$ (קיימים איברים כאלה מכיוון ש $0 \neq I \lhd R/P$)

אז $(a+P)\cdot(b+P) = 0_{R/P}$ ז"א $ab \in P$. מכיוון ש $a, b \notin P$ נקבל ש $\langle b \rangle \not\subset P, \langle a \rangle \not\subset P$ אבל $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \subseteq P$ בסתירה לראשוניות של P.

שימו לב שניתן לקבל את סעיף א בקלות מסעיף ב: אם $P \lhd R$ אידיאל ראשוני ו $I^2 \subseteq P$ ואז מהגדרת אידיאל ראשוני נקבל ש $I \subseteq P$ ומסעיף ב נקבל ש $P \lhd R$ הוא ראשוני למחצה.

ב.

נביט בהעתקה הטבעית $f : R \to R/P$

$\Leftarrow$

נניח ש $P \lhd R$ הוא ראשוני למחצה ויהי $I \lhd R$ כך ש $I^2 \subseteq P$ וגם $I \not\subset P$ אזי האידיאל $f(I) \lhd R/P$ מקיים $(f(I))^2 = 0$ ולכן R/P לא ראשוני למחצה.

נשים לב ש $I \not\subset P$ ולכן $f(I) \neq 0$.

$\Rightarrow$

נניח ש R/P לא ראשוני למחצה, ולכן קיים $0 \neq I \lhd R/P$ כך ש $I^2 = 0$. האידיאל $f^{-1}(I) \lhd R$ מקיים $\left(f^{-1}(I)\right)^2 \subseteq P$ מכיוון ש $I^2 = 0$ ומכיוון ש $I \neq 0$ נקבל ש $f^{-1}(I) \not\subset P$.

ג.

$\Leftarrow$

נניח ש $P \lhd R$ הוא ראשוני למחצה ויהי $a \in R$ כך ש $aRa \subseteq P$ ולכן $a \cdot 1 \cdot a \in P$ ולכן $\langle a \rangle^2 \subseteq P$ ועל פי סעיף קודם $\langle a \rangle \subseteq P$ ולכן $a \in P$.

$\Rightarrow$

אם $P \lhd R$ לא ראשוני למחצה אזי קיים $0 \neq I \lhd R/P$ כך ש $I^2 = 0$. באידיאל $f^{-1}(I) \lhd R$ קיים איבר $a \notin P$. כעת, $aRa \subseteq f^{-1}(I^2) \subseteq P$.

תרגיל 2

נסמן $R=\mathbb{Z}\left[\sqrt{-13}\right]$, $I=\left\langle 7,1-\sqrt{-13}\right\rangle$, $I'=\left\langle 7,1+\sqrt{-13}\right\rangle$.

א. הוכח ש 7 אי פריק בחוג R .
ב. הראה שהמכפלה $I\cdot I'$ הוא אידיאל ראשי של R .
ג. הראה ש 7 אינו ראשוני ב R .
ד. הוכח ש $I\lhd R$ הוא אידיאל מקסימאלי.

פתרון

א. נניח ש $s\cdot t=7$ לא הפיכים, אז $N(s)\cdot N(t)=N(s\cdot t)=49$ מכיוון ש s,t לא הפיכים נקבל ש $N(s),N(t)\neq 1$ ולכן $N(s)=7$ נניח ש $s=a+b\cdot\sqrt{-13}$ אז $N(s)=a^2+13b^2$ ז"א $a^2+13b^2=7$ ולמשוואה אין פתרון.

ב. נוכיח ש I,I' אידיאלים קו מקסימאליים.
$1\cdot 7+(-3)\cdot\left(1+\sqrt{-13}\right)+(-3)\cdot\left(1-\sqrt{-13}\right)=1$ ולכן האידיאלים קו מקסימאלים.
ז"א $I\cdot I'=I\cap I'$ נוכיח ש $\langle 7\rangle=I\cap I'$, $\langle 7\rangle\subseteq I\cap I'$ נשאר להוכיח ש $I\cap I'\subseteq\langle 7\rangle$
נניח בשלילה שלא ז"א קיים איבר $7a+\left(1-\sqrt{-13}\right)b\in I'$ כך ש $7a+\left(1-\sqrt{-13}\right)b\notin\langle 7\rangle$
נשים לב שאם $b\in I'$ אז $b=7x+\left(1+\sqrt{-13}\right)y$ אז

$$7a+\left(1-\sqrt{-13}\right)\left(7x+\left(1+\sqrt{-13}\right)y\right)=7a+\left(1-\sqrt{-13}\right)7x+14y\in\langle 7\rangle$$

ולכן $b\notin I'$. $7a+\left(1-\sqrt{-13}\right)b\in I\cap I'$ ולכן $-3\cdot\left(7a+\left(1-\sqrt{-13}\right)b\right)\in I\cap I'$ בנוסף
$7(b+3a)-\left(1+\sqrt{-13}\right)3b\in I'$ כעת
$7b+21a-3b-3b\sqrt{-13}-21a-3b+3b\sqrt{-13}=b\in I'$ וקיבלנו סתירה.

ג. $14=\left(1+\sqrt{-13}\right)\left(1-\sqrt{-13}\right)$ ואז $7|14$ אבל לא מחלק את $\left(1+\sqrt{-13}\right),\left(1-\sqrt{-13}\right)$ ולכן הוא אינו ראשוני.

ד. $R/I\cong\mathbb{Z}_7$ ולכן I אידיאל מקסימאלי.

תרגיל 3

א. צטט גרסה נכונה של קריטריון אייזנשטיין.
ב. תן דוגמא לפולינום אי פריק ממעלה 2 מעל $\mathbb{Z}$ שאינו מקיים את קריטריון אייזנשטיין לאף ראשוני. מדוע הוא אי פריק?
ג. הוכח שהפולינום $f(x)=x^3+4x^2-2x-40$ אי פריק מעל $\mathbb{Z}$ (הדרכה העזר בהצבה $f(x+t)$ עבור t מתאים).

פתרון

א. יהי D תפ"י, F שדה השברים של D, $p \triangleleft D$ אידיאל ראשוני. יהי $f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$, $1\le n$, כך ש $a_n \notin p$, $a_i \in p$, $0\le i<n$, $a_0 \notin p^2$. אז f אי פריק ב $F[x]$ ואם f פרימיטיבי ב D אז f אי פריק ב $D[x]$.

ב. ל x^2+1 אין שורשים מעל $\mathbb{Z}$ ולכן הוא אי פריק מעל $\mathbb{Z}$.

ג.

$$f(x+6)=(x+6)^3+4(x+6)^2-2(x+6)-40=$$
$$=x^3+18x^2+108x+216+4x^2+48x+144-2x-12-40=$$
$$=x^3+22x^2+154x+308$$

11 מחלק את 22,154,308 אבל לא מחלק את 1. 121 לא מחלק את 308.

תרגיל 4

קיימות שתי פעולות שונות של כפל בסקלר שיהפכו את $M={\mathbb{Z}}/{7\mathbb{Z}}=\{\bar{0},...,\bar{6}\}$ למודול מעל $R=\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\cong {\mathbb{Z}[t]}/{t^2-2}$.

א. מצא את שני הערכים האפשריים של $t\cdot\bar{1}$ ותאר את הכפל בסקלר בשני המקרים.

ב. האם המודולים המתקבלים משתי הבחירות לעיל איזומורפיים זה לזה?

ג. הצג את M (מודול על פי אחת משתי הפעולות) כמודול מנה של המודול החופשי R.

פתרון

נסמן $t\cdot\bar{1}=\bar{n}$ כאשר n הוא מספר טבעי כלשהו. כעת, $\bar{2}=2\cdot\bar{1}=t^2\cdot\bar{1}$ ומצד שני

$$t^2\cdot\bar{1}=t\cdot(t\cdot\bar{1})=t\cdot\bar{n}=t\cdot\underbrace{(\bar{1}+\ldots+\bar{1})}_{n}=\underbrace{t\cdot\bar{1}+\ldots+t\cdot\bar{1}}_{n}=\underbrace{\bar{n}+\ldots+\bar{n}}_{n}=(\bar{n})^2$$

כלומר $\bar{n}$ צריך להיות שורש ריבועי של 2 ב $\mathbb{Z}_7$, ולכן הוא צריך להיות $\bar{3}$ או $\bar{4}$.

נסמן את המודול המתאים ל $\bar{3}$ ב M_3 ואת המודול המתאים ל $\bar{4}$ ב M_4. נניח שקיים איזומורפיזם של המודולים $f:M_3\to M_4$ המוגדר ע"י $f(1)=a$ ($a\in\mathbb{Z}_7\setminus\{0\}$).

כעת, $f(t\cdot 1)=f(3)=3a$. מאידך $f(t\cdot 1)=t\cdot f(1)=t\cdot a=4a$, וזו סתירה.

לכן הם לא איזומורפיים.

אם רוצים לקבל את M_3 כמודול מנה אז לוקחים $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/<3-\sqrt{2}>$.