(1) <u>משפט</u>: יהיו p ו-q פולינומים בעלי התכונות הבאות

(1) ל-q אין אפסים על הציר הממשי

(2) מעלת q גדולה ממעלת p לפחות ב-2

אזי $2\pi i S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)}\,dt$ כאשר S הוא סכום השאריות של הפונקציה $\frac{p(z)}{q(z)}$ בקטבים הנמצאים בחצי מישור העליון, באופן שקול

$-2\pi i T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)}\,dt$ כאשר T הוא סכום השאריות בחצי מישור התחתון.

<u>דוגמא</u>: חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+4)^2}\,dt$

<u>פתרון</u>: לפונקציה $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^2}$ יש קטבים בנקודות $z = \pm 2i$ ושניהם מסדר 2. רק הנקודה $z = 2i$ נמצאת בחצי מישור העליון. כידוע אם $z = a$ היא קוטב מסדר m של פונק' f אז

$$Res(f,a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(f(z)(z-a)^m \right)$$

לכן

$$Res(f,2i) = \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2 (z-2i)^2}{(z^2+4)^2} \right)$$

(2)

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+2i)^2}\right)$$

$$= \lim_{z \to 2i}\left(\frac{2z}{(z+2i)^2} - \frac{2z^2}{(z+2i)^3}\right)$$

$$= \frac{4i}{(4i)^2} - \frac{2(2i)^2}{(4i)^3} = \frac{1}{4i} - \frac{1}{8i} = \frac{-i}{8}$$

לכן $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+4)^2}\,dt = 2\pi i \frac{-i}{8} = \frac{\pi}{4}$

3) תרגיל: חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4}$

פתרון: לפונ' $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ יש קטבים בנקודות

$z = e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{5\pi i/4}, e^{7\pi i/4}$ שהם כולם קטבים

פשוטים, אולם רק $z = e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}$ נמצאים

בחצי מישור העליון. השארית בקוטב $z = e^{\pi i/4}$

שווה ל- $\lim_{z \to e^{i\pi/4}} \frac{(z - e^{\pi i/4})}{1+z^4}$

$$= \lim_{z \to e^{\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-3\pi i/4}$$

לופיטל

באותו אופן $Res(f, e^{3\pi i/4}) = \frac{1}{4} e^{-\pi i/4}$

לכן ③

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{2\pi i}{4}\left(e^{-3\pi i/4} + e^{-\pi i/4}\right)$$

$$= \frac{2\pi i}{4}\left(e^{-2\pi i/4} e^{-\pi i/4} + e^{-\pi i/4}\right)$$

$$= \frac{2\pi i}{4}\left(-i\, e^{-\pi i/4} + e^{-\pi i/4}\right)$$

$$= \frac{2\pi i}{4}(1-i)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

<u>משפט</u>: יהיו p ו-q פולינומים בעלי התכונות הבאות

(1) ל-q אין אפסים על הציר הממשי.

(2) מעלת q גדולה ממעלת p לפחות ב-1.

אז אם $\beta > 0$ מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)} \cos(\beta t)\, dt = \mathrm{Re}(2\pi i \Sigma)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)}{q(t)} \sin(\beta t)\, dt = \mathrm{Im}(2\pi i \Sigma)$$

כאשר Σ הוא סכום השארים של הפונקציה $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} e^{i\beta z}$ בקטבים הנמצאים בחצי מישור העליון.

(4) בוחן: חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{t\sin t}{t^4+4}\,dt$

פתרון: הפונ' $t \mapsto \frac{t\sin t}{t^4+4}$ היא פונ' זוגית

ולכן $\int_0^\infty \frac{t\sin t}{t^4+4}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\sin t}{t^4+4}\,dt$, ולפונקציה

$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^4+4}$ יש שני קטבים פשוטים בחצי המישור העליון בנקודות

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$-1+i = \sqrt{2}\, e^{3\pi i/4}$

נחשב את השאריות בנקודות אלו

$$\mathrm{Res}(f, 1+i) = \lim_{z\to 1+i} \frac{(z-1-i)\, z e^{iz}}{z^4+4}$$

$$= \lim_{z\to 1+i} \frac{ze^{iz} + (z-1-i)e^{iz} + i(z-1-i)ze^{iz}}{4z^3}$$

$$= \frac{(1+i)\, e^{i(1+i)}}{4(1+i)^3} = \frac{e^{i(1+i)}}{8i}$$

$$\mathrm{Res}(f, -1+i) = \frac{e^{i(-1+i)}}{-8i}$$ באותו אופן

$$\int_0^\infty \frac{t\sin t}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(2\pi i\left(\frac{e^{i(1+i)}}{8i} + \frac{e^{i(-1+i)}}{-8i}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(2\pi i\,\frac{e^{-1}}{8i}\left(e^{i}-e^{-i}\right)\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(2\pi i\,\frac{\sin 1}{4e}\right)$$ 5

$$=\frac{\pi}{4e}\sin(1)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}\,dx$$

תרגיל 3: חשבו
כאשר $0 < a,b$

פתרון: נמצא את נקודות הסינגולריות של הפונקציה $f(z)=\dfrac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)^2}$.

קל לבדוק של-f יש סינגולריות ב-$z=\pm ib$
ורק $z=ib$ נמצאת בחצי מישור העליון וכיוון ש

$f(z)=\dfrac{1}{(z-ib)^2}\dfrac{e^{iaz}}{(z+ib)^2}$ והפונ' $\dfrac{e^{iaz}}{(z+ib)^2}$

שונה מאפס בנק' $z=ib$ נקבל ש- $z=ib$
היא קוטב מסדר 2. נחשב את השארית

$$\mathrm{Res}(f,ib)=\lim_{z\to ib}\frac{d}{dz}\left(f(z)(z-ib)^2\right)$$

$$=\lim_{z\to ib}\frac{d}{dz}\left(e^{iaz}(z+ib)^{-2}\right)$$

6

$$= \lim_{z \to ib} \frac{ia e^{iaz}}{(z+ib)^2} - \frac{2e^{iaz}}{(z+ib)^3}$$

$$= \frac{-ia\, e^{-ab}}{-4b^2} - \frac{2e^{-ab}}{-8ib^3}$$

$$= \frac{a e^{-ab}}{4ib^2} + \frac{e^{-ab}}{4ib^3}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^2}\,dx$$ pd

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(2\pi i\left(\frac{a e^{-ab}}{4ib^2} + \frac{e^{-ab}}{4ib^3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b^3}\right) e^{-ab} \cdot \pi$$