

תרגיל בית מספר 6

תאריך הגשה: 23.05

שאלה 1

תהי $f: X \rightarrow Y$ פונקציה בין שני מרחבים טופולוגיים. ניתן לראות את $f(X)$ כתת מרחב טופולוגי של Y .

א. הוכיחו שאם f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y אזי היא פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- $f(X)$.

ב. הראו ע"י שתי דוגמאות נגדיות שמהעובדה ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- $f(X)$ לא נובע ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y .

שאלה 2

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא פתוחה/סגורה/רציפה:

$$א. f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ המוגדרת ע"י } f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$ב. f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ המוגדרת ע"י } f_2(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$ג. f_3: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ עבור } X = [2,3] \cup [4,5] \text{ המוגדרת ע"י } f_3(x) = \begin{cases} 1 & x \in [2,3] \\ x & x \in [4,5] \end{cases}$$

שאלה 3

תהי X קבוצה לא ריקה עם הטופולוגיה הקו-סופית. האם המרחב $(X, \tau_{\text{cofinite}})$ קשיר? (רמז: תלוי בעוצמה של X).

שאלה 4

תזכורת – הישר של סורגנפריי:

$O \in T$ אמ"מ O היא איחוד של קטעים מהצורה $[a, b)$ (כולל איחוד ריק).

הוכיחו כי הישר של סורגנפריי אינו קשיר.

שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

שאלה 5

תהי $A = (2, 3) \cup (5, 8)$ (איחוד קטעים פתוחים) ותהי $B = A \times \mathbb{R}$ האם B תת מרחב קשיר של \mathbb{R}^2 ?

שאלה 6

הוכיחו שבכל מרחב נורמי מתקיים $cl(B(a, r)) = B[a, r]$. מצאו דוגמא נגדית עבור מרחב מטרי שאינו נורמי.

בנוס

מצאו דוגמא לפונקציה רציפה שהיא סגורה ואינה פתוחה. הוכיחו שהיא אכן כזאת.

בהצלחה!