פתרון הבוחן באינפי 2

שאלה 1

נבצע הצבה $t=\sqrt{x}$ ולכן $\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ כלומר $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$ ואז

$$\int \cos\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int 2t\cos t\mathrm{d}t$$

נמשיך עם אינטגרציה בחלקים ונקבל

$$\int 2t\cos t\mathrm{d}t=2t\sin t-\int 2\sin t\mathrm{d}t=2t\sin t+2\cos t$$

ולכן התוצאה היא

$$2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+2\cos\sqrt{x}$$

שאלה 2

(בבוחן ביקשנו להוכיח אי שוויון חלש, אני אציג כאן הוכחה לאי שוויון חזק)
ברור כי בתחום $[0,1]$ מתקיים ש

$$\frac{1}{e}=e^{-1}\leq e^{-x^2}\leq e^0=1$$

ולכן

$$\frac{x^2}{e}\leq x^2e^{-x^2}\leq x^2$$

וזה מייד גורר ש

$$\int_0^1 \frac{x^2}{e}\mathrm{d}x\leq\int_0^1 x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x\leq\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$$

היות ויש נקודה בתחום שבה

$$x^2e^{-x^2}<x^2$$

ויש נקודה בתחום שבה

$$\frac{x^2}{e}<x^2e^{-x^2}$$

וכל הפונקציות כאן רציפות בתחום, האי שוויון של האיניטגרלים הוא אי שוויון חזק

$$\int_0^1 \frac{x^2}{e}\mathrm{d}x < \int_0^1 x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x < \int_0^1 x^2\mathrm{d}x$$

(הוכחתם בשיעורי הבית שאם $f \leq 0$ ו f רציפה ויש נקודה x_0 שבה $f(x_0) > 0$ אז $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$)

ולכן

$$\frac{1}{3e} = \int_0^1 \frac{x^2}{e}\mathrm{d}x < \int_0^1 x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x < \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

כנדרש.

שאלה 3

ראשית נשים לב שיש בעיה רק ב ∞ (הפונקציה מוגדרת ב 0 בלי בעיה).

אם $\alpha > 0$ אז מבצעים מבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{e^{\alpha x}}$ ואז מקבלים

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta + e^{\alpha x}} = 1$$

היות ו $\int_0^\infty \frac{1}{e^{\alpha x}}$ מתכנס גם האינטגרל שלנו מתכנס (לא משנה מה הערך של β).

אם $\alpha \leq 0$ אז נקבל ש

$$\frac{1}{x^\beta + 1} \leq \frac{1}{x^\beta + e^{\alpha x}} \leq \frac{1}{x^\beta}$$

אם $\beta > 1$ האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^\beta}\mathrm{d}x$ מתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס.

אם $\beta \leq 1$ האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^\beta + 1}\mathrm{d}x$ מתבדר ולכן גם האינטגרל שלנו מתבדר.

לסיכום: אם $\alpha > 0$ יש התכנסות ואם $\alpha \leq 0$ יש התכנסות רק אם $\beta > 1$.

שאלה 4

סעיף א

נבצע מבחן ההשוואה הגבולי עם $\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$ ונקבל

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln t}{\sqrt{t}}}{\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[4]{t}\ln t = 0$$

(כי $\sqrt[4]{t}$ יותר חזק מ $\ln t$ ־ קל להראות עם לופיטל)

היות ו $\int\limits_0^{\ln x} \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}t$ מתכנס. גם האינטגרל שלנו מתכנס.

(יש סטודנטים שחישבו את האינטגרל עם אינטגרציה בחלקים או הצבה ומצאו את $F(x)$ בצורה מפורשת־ כמובן שגם תשובה כזאת היא נכונה)

סעיף ב

נגזור את הפונקציה $F(x)$

$$F'(x) = \frac{\ln\ln x}{\sqrt{\ln x}}\frac{1}{x}$$

הנגזרת מתאפסת כש

$$\ln\ln x = 0$$

כלומר $x = e$ (נשים לב שאין צורך לבדוק נקודות קצה כי התחום שלנו פתוח)

קל לראות שאם $x < e$ הנגזרת שלילית ואם $x > e$ הנגזרת חיובית ולכן זאת נקודת מינימום.