אינפי 4 – תרגול 4

שדה וקטורי

הגדרה: נתון תחום במישור או במרחב, פונקציה שמתאימה וקטור יחיד $F(x)$ לכל נקודה x בתחום נקראת שדה וקטורי.

במישור נוכל להציג את השדה הוקטורי ע"י

$$F(x,y) = f(x,y)i + g(x,y)j$$

ובמרחב

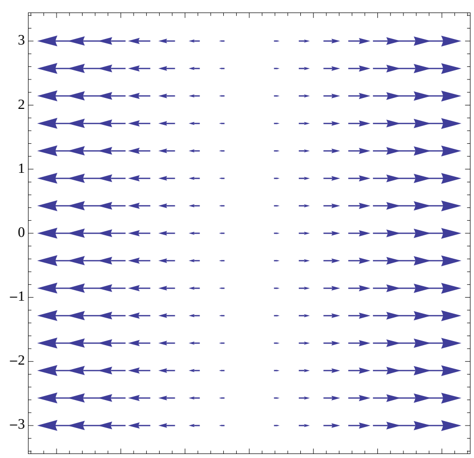
$$F(x,y,z) = f(x,y,z)i + g(x,y,z)j + h(x,y,z)k$$

לעיתים כדאי לסמן את השדות הוקטוריים $F(x,y)$ ו $F(x,y,z)$ בסימון וקטורי מלא. לשם כך מזהים את הנקודה (x,y) עם וקטור המיקום $r = xi + yj$ ואת הנקודה (x,y,z) עם וקטור המיקום $r = xi + yj + zk$. כך ניתן לרשום שדה וקטרי במרחב דו ממדי או תלת ממדי בצורה $F(r)$.

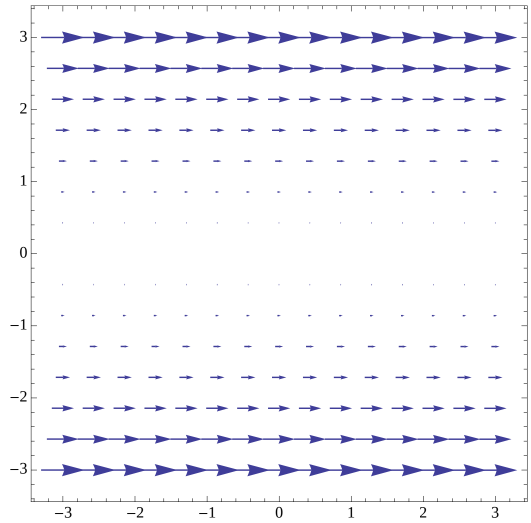
דוגמא: עפ"י חוק הכבידה היוניברסלי של ניוטון הכוח המופעל על גוף בעל מסה m ע"י גוף הנמצא בנקודה r ע"י גוף בעל מסה M שנמצא בראשית הצירים הינו $F(r) = -\frac{GmM}{\|r\|^2}\hat{r}$. כאשר אנו מסמנים ב $\hat{r}$ וקטור יחידה בכיוון הרדיאלי.

דוגמאות:

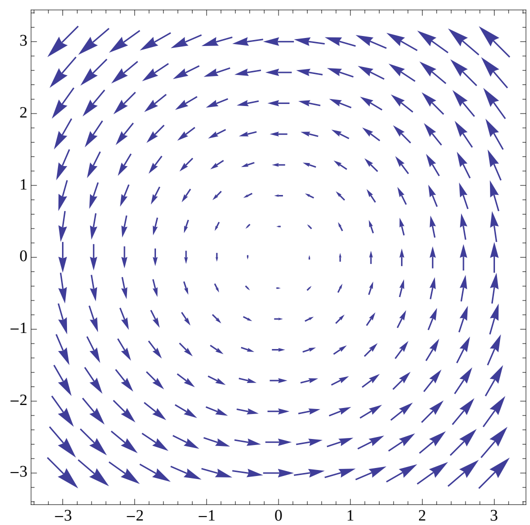
1. $F(x,y) = xi$



2. $F(x,y) = \sqrt{y}i$



3. $F(x,y) = -yi + xj$



הסיבוב נובע למעשה מהעתקה

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

כאשר $\theta = \frac{\pi}{2}$.

<u>שדה גרדיינט</u>

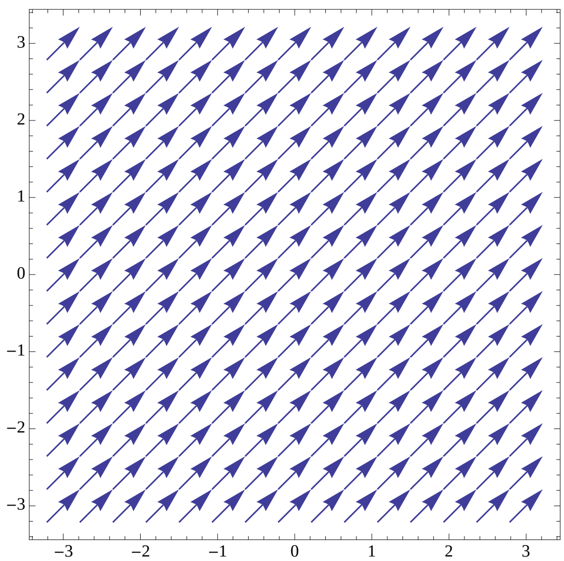
קבוצה חשובה של שדות וקטוריים הם השדות שניתן לרשום אותם כגרדיינט של פונקציה. כזכור, אם ϕ היא פונקציה של שלושה משתנים, אז הגרדיינט של ϕ מוגדר ע"י –

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} i + \frac{\partial\phi}{\partial y} j + \frac{\partial\phi}{\partial z} k$$

נוסחה זו מגדירה שדה וקטורי במרחב תלת ממדי, הנקרא שדה הגרדיינט של ϕ . באופן דומה, הגרדדינט של פונקציה של שני משתנים מגדיר שדה גרדיינט במרחב דו ממדי. בכל נקודה שבה הגרדיינט שונה מאפס, וקטור שדה הגרדיינט מורה את הכיוון שבו קצב הגידול של ϕ מקסימלי.

דוגמא: שרטט את שדה הגרדיינט של $\phi(x,y)=x+y$

פתרון: הגרדיינט של ϕ הינו $\nabla\phi=i+j$. ולכן



בהינתן שדה וקטורי כלשהו F , טבעי לשאול אם F הוא שדה גרדיינט של פונקציה ϕ , שכן לא כל שדה וקטורי הוא שדה גרדיינט. לשדות וקטוריים שהם שדות גרדיינט יש שם משלהם:

הגדרה: נאמר על שדה וקטורי F שהוא שדה משמר בתחום D ובקיצור שדה משמר, אם קיימת פונקציה ϕ ש F הוא שדה הגרדיינט שלה ב D . פונקציה ϕ כזאת נקראת *פונקציית הפוטנציאל* של f בתחום D.

<u>עבודה כאינטגרל קווי</u>

אם חלקיק נע בקו ישר בכיוון מסויים T כך שפועל כח קבוע F על החלקיק וכך שהזוית שנוצרת בין F ל T הינה θ אזי העבודה שמבצע הכוח F על החלקיק מוגדרת כך:

$$W=\left(\|F\|\cos\theta\right)s=\left(F\cdot T\right)s$$

כאשר החלקיק אינו נע על קו ישר אלא על עקום C נגדיר את העבודה להיות $W=\int_C F\cdot dr$, כאשר $dr=dxi+dyj+dzk$. לכן, אם $F=f(x,y,z)i+g(x,y,z)j+h(x,y,z)k$ נקבל כי $W=\int_C f(x,y,z)dx+g(x,y,z)dy+h(x,y,z)dz$.

דוגמא: חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח - $F(x,y)=x^3yi+(x-y)j$ על החלקיק שנע על הפרבולה $y=x^2$ מ $(-2,4)$ עד $(1,1)$.

פתרון: אם נבחר כפרמטר את $t=x$, נוכל להציג את העקומה C כך - $\left(-2\le t\le 1\right)$ $x=t, y=t^2$

או במשוואה הוקטורית, כך - $\left(-2\le t\le 1\right)$ $r\left(t\right)=ti+t^2j$. לכן נקבל כי

$$W=\int_C F\cdot dr=\int_C\left(x^3yi+\left(x-y\right)j\right)\cdot\left(dxi+dyj\right)=\int_C x^3ydx+\left(x-y\right)dy$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(t^5+\left(t-t^2\right)\left(2t\right)\right)dt=3$$