תירגול 8

12 ביוני 2017

הגדרות: תהא $T:V\to V$ ה"ל אזי

1. אם $Tv=\lambda v$ עבור $v\neq 0$ אזי vו"ע ו λ ע"ע.
2. המרחב העצמי של λ ע"ע הוא $V_\lambda=\{v\in V\,:\,Tv=\lambda v\}$
3. הפ"א של T (מסומן p_T) מוגדר להיות הפ"א של מטריצה מייצגת $[T]_B^B$ (עבור B בסיס כלשהוא. משפט: כל בסיס יתן אותו פ"א)
4. הצבה של T הפולינום כלשהוא $p(x)=\sum_{i=0}^m a_i x^i$ היא ה"ל $p(T):V\to V$ המוגדרת $\sum_{i=0}^m a_i T^i$ כאשר $T^0=I$ הזהות.
5. הפולינום המינמאלי של T , m_T הוא הפולינום עם דרגה מיני' ששונה מאפס כשמציבים בו את T מקבלים 0.
6. וכו'

משפט:

1. λ ע"ע של T אמ"מ λ ע"ע של $[T]_B^B$ (כלומר שורש של הפ"א של T)
2. v ו"ע של T אמ"מ $[v]_B$ ו"ע של $[T]_B^B$.
3. מרחב הקורדינאטות של המרחב העצמי $[V_\lambda]_B$(עבור λ ע"ע, B בסיס) שווה למרחב העצמי של λ כע"ע של המטריצה המייצגת $[T]_B^B$
4. מתקיים כי $p_T(T)=0$
5. מתקיים כי m_T מחלק כל פולינום $p(x)$ המקיים $p(T)=0$. בפרט m_T מחלק את p_T ובנוסף יש להם אותם גורמים אי פריקים.
6. וכו'

תרגיל: תהא $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ ה"ל המוגדרת

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0-a_2)+(a_0+a_1-a_2)\,x$$

מצאו ו"ע, ע"ע פ"א, פ"מ של T.

פתרון: נשתמש בבסיס $S=\left\{1,x,x^2\right\}$ ונחשב $[T]_S^S$:

$$A=[T]_S^S=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

כעת הפ"א λ $p_A(\lambda)=(\lambda-1)^2$ ולכן הע"ע הם $0,1$. נחשב מ"ע

$$V_0=N(\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix})=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_1=N(\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix})=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן מ"ע עבור T הם

$$V_0=span\left\{1+x^2\right\},V_1=span\left\{x\right\}$$

ולכן T אינה לכסינה (אין בסיס של ו"ע) ולכן $m_T(x)=x(x-1)^2$.

מרחב T-אינווריאנטים

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, תת מרחב W של V נקרא אינווריאנטי (שמור) אם $T\left(W\right)\subseteq W$ או במילים אחרות

$$\forall w\in W:\;Tw\in W$$

שימו לב כי אם W T אינוואריאנטי ניתן להתסכל על ה"ל המצומצמת

$$T_{|W}:w\to W$$

תרגיל: נגדיר $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ע"י

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x-y\\0\end{pmatrix}$$

האם תתי המרחבים הבאים אינווריאנטים?

1. $W_1=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$
2. $W_2=Span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$
3. $W_3=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:

1. נפעיל את העתקה על W_1 ונקבל

$$T\left(W_1\right)=Span\left\{T\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right),T\left(\begin{array}{c}0\\1\\0\end{array}\right)\right\}=Span\left\{\left(\begin{array}{c}1\\1\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\-1\\0\end{array}\right)\right\}=Span\left\{\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\1\\0\end{array}\right)\right\}\subseteq W_1$$

לכן W_1 הוא תת מרחב אינווריאנטי של $\mathbb{R}^3$ תחת T

2. נפעיל את העתקה על W_2 ונקבל

$$T\left(W_2\right)=Span\left\{T\left(\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right)\right\}=Span\left\{0\right\}=\left\{\overrightarrow{0}\right\}\subseteq W_2$$

לכן W_2 הוא תת מרחב אינווריאנטי של $\mathbb{R}^3$ תחת T

3. נפעיל את העתקה על W_3 ונקבל

$$T\left(W_3\right)=Span\left\{T\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right)\right\}=Span\left\{\left(\begin{array}{c}1\\1\\0\end{array}\right)\right\}\nsubseteq W_3$$

לכן W_2 הוא **לא** תת מרחב אינווריאנטי של $\mathbb{R}^3$ תחת T

משפט: לכל $T:V\to V$ מתקיים כי:

1. כל מרחב עצמי הוא תת מרחב אינווריאנטי.
2. $Ker\left(T\right)$ו־$Im\left(T\right)$ הם גם מרחבים אינווריאנטים.

משפט (משפט הפירוק הפרימרי):
תהא $T:V\to V$ ה"ל ויהא $m_T=\prod_i p_i^{r_i}$ כאשר p_i הגורמים האי פריקים. נגדיר $W_i=\ker\left(p_i^{r_i}(T)\right)$. אזי

1. לכל i התת"מ W_i הוא T־ אינוואריאנטי
2. מתקיים כי $V=\oplus_i W_i$
3. אם B_i בסיס ל W_i ו $B=\cup_i B_i$ אזי $[T]_B^B=\oplus_i[T_{|W_i}]_{B_i}$

דוגמא: נמשיך עם הדוגמא ממקודם:

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0-a_2)+(a_0+a_1-a_2)\,x$$

שמצאנו כי $p_T(x)=m_T(x)=x(x-1)^2$: אזי

$$W_1=\ker T=span\left\{1+x^2\right\}$$

$$W_2=\ker(T-I)^2=span\{1,x\}$$

$$[\ker(T-I)^2]_S = N([T]_S - I)^2 = N\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)]$$

מקיימים

$$V = \mathbb{R}_2[x] = W_1 \oplus W_2$$

ונשים לב כי

$$T_{|W_1} : span\left\{1+x^2\right\} \to span\left\{1+x^2\right\}$$

$$T_{|W_2} : span\left\{1,x\right\} \to span\left\{1,x\right\}$$

מוגדרת ומתקיים כי $\left[T_{|W_1}\right]_{B_1} = (0), \left[T_{|W_2}\right]_{B_2} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$ עבור $B_1 = \left\{1+x^2\right\}, B_2 = \{1,x\}$ ועבור $B = B_1 \cup B_2 = \left\{1+x^2, 1, x\right\}$ מתקיים כי

$$[T]_B = \left(\begin{array}{ccc} 0 & & \\ & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{array}\right) = (0) \oplus \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right)$$

תרגיל: תהיה העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ המוגדרת על ידי $T\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 2x \\ x+y \\ 2z \\ 3w \end{array}\right)$ מצא את הפירוק הפרימרי של $\mathbb{R}^4$ ביחס ל-T.

פתרון: המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי שהיא

$$[T]_S^S = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

כעת נמצא את הפולינום האופייני של המטריצה שהוא גם הפולינום האופייני של העתקה

$$p_T(x) = (x-2)^2 (x-1)(x-3)$$

נמצא את המ"ע:

$$\mathrm{Ker}\,(T-2I) = N\left([T-2I]_S^S\right) = N\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = Span\left\{\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)\right\}$$

$$\mathrm{Ker}\,(T-I) = N\left([T-I]_S^S\right) = N\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = Span\left\{\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)\right\}$$

ו־

$$\mathrm{Ker}\,(T-3I)=N\left([T-3I]_S^S\right)=N\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=Span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן T לכסינה (יש לה בסיס של ו"ע) ולכן $m_T(x)=(x-2)(x-1)(x-3)$ ולפי משפט הפירוק הפרימרי מתקיים כי

$$\mathbb{R}^4=\mathrm{Ker}\,(T-2I)\oplus\mathrm{Ker}\,(T-I)\oplus\mathbf{Ker}\,(T-3I)$$

תרגיל: יהיו $T_i:V\to V$ ה"ל $(1\le i\le r)$ ויהא W תת מרחב T_i אינוואראנטי לכל i. נגדיר $T=\sum_{i=1}^r\alpha_iT_i$. הוכיחו כי W הוא T־אינוואראנטי.

פתרון: יהא $w\in W$ אזי לכל i $T_i(w)=w_i\in W$ ואז

$$T(w)=\left(\sum_{i=1}^r\alpha_iT_i\right)w=\sum_{i=1}^r\alpha_iT_iw=\sum_{i=1}^r\alpha_iw_i\in W$$

כנדרש.

תרגיל: תהא $T:V\to V$ ה"ל. יהא $W\le V$ ת"מ T־איוואריאנטי. יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ ע"ע שונים של T המתאימים ל $v_1,\ldots,v_r$ ו"ע. הוכיחו כי אם $\sum_{i=1}^r v_i\in W$ אזי לכל i מתקיים $v_i\in W$.

פתרון: באנידוקציה על r. עבור $r=1$ ברור. נניח כעת שהטענה נכונה עד r לא כולל ונוכיח עבור r. נתון $\sum_{i=1}^r v_i\in W$. נסמן λ_i את ע"ע שמתאים ל v_i. נתון ש W הוא Tאינוואראטי ובנוסף הוא גם λ_rI ־ אינוואראנטי ולכן הוא גם $T-\lambda_rI$ אינוארנטי ולכן

$$(T-\lambda_rI)\left(\sum_{i=1}^r v_i\right)=\sum_{i=1}^r Tv_i-\sum_{i=1}^r\lambda_rv_i=\sum_{i=1}^r\lambda_iv_i-\sum_{i=1}^r\lambda_rv_i=\sum_{i=1}^{r-1}(\lambda_i-\lambda_r)\,v_i\in W$$

כיוון ש $\lambda_i-\lambda_r\neq 0$ נקבל כי $(\lambda_i-\lambda_r)\,v_i$ גם כן ו"ע שמתאים לע"ע λ_i. מהנחת האינדוקציה $(\lambda_i-\lambda_r)\,v_i\in W$ לכל $1\le i\le r-1$ ולכן $v_i\in W$ לכל $1\le i\le r-1$ ולכן מהנתון גם $v_r\in W$ כנדרש.

הגדרה: ה"ל $T:V\to V$ תקרא הטלה אם $T^2=T$.

משפט: עבור $T:V\to V$ הטלה קיימים W,W' ת"מ כך ש $V=W\oplus W'$ ו T מוגדרת $T:W\oplus W':\to V$ ע"י $T(w+w')=w$. בנוסף W,W' הוא יחיד יוצא $(W=Im(T),\,W'=\ker(T))$ ולכן לעיתים קוראים ל T הטלה על W. בנוסף W,W' ת"מ T־ אינוואראנטי .

דוגמא: $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}$ מקיימת $T^2=T$ והיא הטלה על רכיב הראשון.

תרגיל: תהא $T:V\to V$ הטלה. מצאו את הפ"א, פ"מ והוכיחו כי היא לכיסנה.

פתרון : נסמן $W=Im(T),W'=\ker(T)$. נבחר בסיסים B,B' בהתאמה. ואז

$$\forall w\in B:\,Tw=w,\forall w'\in B':Tw'=0$$

ולכן B מכיל ו"ע המתאימים לערך עצמי 1 ו B' מכיל ו"ע המתאימים לערך עצמי 0 . כיוון שאלו ת"מ אינוואראנטים מתקיים כי

$$[T]_{B\cup B'}^{B\cup B'}=[T_{|w}]_B\oplus[T_{|W'}]_{B'}=I_{|B|}\oplus 0_{|B'|}$$

מכאן גם נוכל להסיק כי $p_T(\lambda)=(\lambda-1)^{|B|}\lambda^{|B'|}$ והפ"מ מל"ל שונים ולכן הוא

$$m_T(\lambda)=\begin{cases}\lambda-1 & T=I\\ \lambda & T=0\\ \lambda(\lambda-1) & T\neq 0,I\end{cases}$$

וסיימנו.