הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובבסקי
המתרגלים: מני ולואי

פתרון תרגיל בית מספר 8

שאלה 1

נתונה מערכת $\begin{cases} u+v=x+y \\ \dfrac{\sin u}{\sin v}=\dfrac{x}{y} \end{cases}$

א) הוכיחו כי המערכת מגדירה פונקציות דיפרנציאביליות $u(x,y),v(x,y)$ בסביבת הנקודה $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$, כאשר $\frac{\pi}{6}=v\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=u\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$.

ב) חשבו את $\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right),\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$

פתרון:

א)

תהי $F(x,y,u,v)=\left(u+v-x-y,\dfrac{\sin u}{\sin v}-\dfrac{x}{y}\right)$

($F=(F_1,F_2),F_1(x,y,u,v)=(u+v-x-y),F_2(x,y,u,v)=\dfrac{\sin u}{\sin v}-\dfrac{x}{y}$) מתקיימים התנאים הבאים:

1) $F(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})=(0,0)$

2) $F_x=\left(-1,-\dfrac{1}{y}\right),F_y=\left(-1,\dfrac{x}{y^2}\right),F_u=\left(1,\dfrac{\cos u}{\sin v}\right),$
$F_v=\left(1,\dfrac{0\cdot\sin v-\sin u\cos v}{\sin^2 v}\right)=\left(1,\dfrac{-\sin u\cos v}{\sin^2 v}\right)$ ניתן לראות ש $F\in C^1$ בסביבת $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$.

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{\cos u}{\sin v} & \frac{-\sin u\cos v}{\sin^2 v}\end{vmatrix}_{(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=-2\sqrt{3}\neq 0 \quad (3$$

ולכן המטריצה הפיכה.

מתקיימים בסה"כ תנאי משפט הפונקציה הסתומה והמערכת מגדירה פונקציות $u(x,y),v(x,y)$

C^1 (ובפרט דיפרנציאביליות) בסביבת הנקודה $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$, כאשר $\frac{\pi}{6}=v\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=u\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$.

ב)

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,v)}(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})}=\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,v)}(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,x)}(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})}=\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,x)}(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,v)}(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ \frac{x}{y^2} & \frac{-\sin u\cos v}{\sin^2 v}\end{vmatrix}_{(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ \frac{6}{\pi} & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=\sqrt{3}-\frac{6}{\pi}$$

ולכן , $\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}-\frac{6}{\pi}}{2\sqrt{3}}$.

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,x)}(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})=\begin{vmatrix}1 & -1\\ \frac{\cos u}{\sin v} & \frac{-1}{y}\end{vmatrix}_{(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ \sqrt{3} & -\frac{6}{\pi}\end{vmatrix}=-\frac{6}{\pi}+\sqrt{3}$$

ולכן נקבל בסה"כ $\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}-\frac{6}{\pi}}{2\sqrt{3}}$

הקורס: אינפי מתקדם
המרצה: פרופסור אגרנובסקי
המתרגלים: מני ולואי

<u>שאלה 2</u>

נתונה מערכת $\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2 \\ xy - \sin u \cos v + z = 0 \end{cases}$

א) הוכיחו כי המערכת מגדירה פונקציות דיפרנציאביליות $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ בסביבת הנקודה $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, כאשר $z\left(\frac{\pi}{2},0\right)=0$ $x\left(\frac{\pi}{2},0\right)=y\left(\frac{\pi}{2},0\right)=1,$.

ב) חשבו את $\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2},0\right), \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

<u>פתרון:</u>

א) תהי $F:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$

$$F(u,v,x,y,z) = \left(x^2 - y\cos(uv) + z^2, x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 - 2, xy - \sin u \cos v + z\right)$$
$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

מתקיימים התנאים:

1) $F(\frac{\pi}{2},0,1,1,0) = (0,0,0)$.

2) $F \in C^1(\mathbb{R}^5)$ (למעשה ניתן לומר ש $F \in C^\infty(\mathbb{R}^5)$ (ברור שכל רכיב של הפונקציה הוא פונקציה שגזירה אינסוף פעמים).

3)

$$\frac{D(F_1,F_2,F_3)}{D(x,y,z)}(\frac{\pi}{2},0,1,1,0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix}_{(\frac{\pi}{2},0,1,1,0)} = \begin{vmatrix} 2x & -\cos uv & 2z \\ 2x & 2y & 4z \\ y & x & 1 \end{vmatrix}_{(\frac{\pi}{2},0,1,1,0)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

ולכן המטריצה הפיכה.

מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה ונקבל שהמערכת מגדירה פונקציות דיפרנציאביליות $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ בסביבת הנקודה $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ (למעשה C^1 שגורר דיפרנציאביליות ואפילו יותר מכך C^∞), כאשר $x\left(\frac{\pi}{2},0\right)=y\left(\frac{\pi}{2},0\right)=1,\ z\left(\frac{\pi}{2},0\right)=0$.

ב) $$\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=-\frac{\frac{D(F_1,F_2,F_3)}{D(u,y,z)}(\frac{\pi}{2},0,1,1,0)}{\frac{D(F_1,F_2,F_3)}{D(x,y,z)}(\frac{\pi}{2},0,1,1,0)},\quad \frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=-\frac{\frac{D(F_1,F_2,F_3)}{D(v,y,z)}(\frac{\pi}{2},0,1,1,0)}{\frac{D(F_1,F_2,F_3)}{D(x,y,z)}(\frac{\pi}{2},0,1,1,0)}$$

לא נחשב את הביטוים אלא רק נציין ש

$$\frac{D(F_1,F_2,F_3)}{D(u,y,z)}(\frac{\pi}{2},0,1,1,0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z}\end{vmatrix}_{(\frac{\pi}{2},0,1,1,0)}$$

ו-

$$\frac{D(F_1,F_2,F_3)}{D(v,y,z)}(\frac{\pi}{2},0,1,1,0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\\ \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z}\end{vmatrix}_{(\frac{\pi}{2},0,1,1,0)}$$

<u>שאלה 3</u> (מבחן תשס"ב)

מצאו את כל הנקודות a על המשטח $M: z=x^2+y^2$ כך שהמישור המשיק $T_a\left(M\right)$ הוא מקביל למישור $x+2y+z=9$. כתבו את משוואת המישור המשיק $T_a\left(M\right)$ בנקודות אלו.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו הוא מהצורה $z=g(x,y)=x^2+y^2$ ולכן המישור המשיק בנקודה כללית למשטח הינו: $\left(x_0,y_0,g(x_0,y_0)\right)$

$$z=g_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+g_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+g(x_0,y_0)=2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+{x_0}^2+{y_0}^2$$

נעביר אגפים לקבל את הצורה $2x_0\cdot x+2y_0\cdot y-z={x_0}^2+{y_0}^2$.

כעת, שני מישורים $\begin{matrix} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{matrix}$ מקבילים אם"ם $(a,b,c)=t(a',b',c')$

לכן הנקודות בהן המישור המשיק מקביל למישור הנתון הן הנקודות בהן מתקיים:
$(2x_0,2y_0,-1)=t(1,2,1)$ ולכן $t=-1$, $x_0=-\frac{1}{2}$, $y_0=-1$, $z_0={x_0}^2+{y_0}^2$. כלומר המישור בנקודה $(-\frac{1}{2},-1,\frac{5}{4})$ עונה על תנאי השאלה.

המישור המשיק בנקודה זו הינו $-x-2y-z=\frac{5}{4}$

<u>שאלה 4</u>

תהי $f(x,y)=(x^2+2y^2,2x^2+y^2)$

א) הוכיחו ש f דיפאומורפיזם בסביבת $(1,1)$.

ב) מצאו את $J_{f^{-1}}(3,3)$ (מטריצת יעקובי של הפונקציה ההפוכה בנקודה $(3,3)$)

<u>פתרון:</u>

א) נגדיר פונקציה $f(x,y)=(x^2+2y^2,2x^2+y^2)$. מתקיימים התנאים הבאים-

1) $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ כי מדובר בפולינומים (מספיק לנו C^1).

2) $J_f(x,y)=\begin{pmatrix}2x & 4y\\ 4x & 2y\end{pmatrix}\Rightarrow J_f(1,1)=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix},\det\left(J_f(1,1)\right)=4-16=-12\neq 0$

היעקוביאן שונה מאפס בנקודה הנתונה ומכאן מטריצת יעקובי בנקודה זו היא הפיכה.

מתנאים 1,2 נקבל ממשפט הפונקציה ההפוכה כי f דיפאומורפיזם בסביבת $(1,1)$. כלומר f דיפרנציאבילית והפיכה מקומית ו f^{-1} דיפרנציאבילית (למעשה ידוע ש $f\in C^{\infty}(N)$ באשר N סביבה של $f(1,1)$).

ב) אם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה ההפוכה עבור פונקציה f בנקודה a אז מקבלים בנוסף ש $J_{f^{-1}}(f(a))=\left(J_f(a)\right)^{-1}$. אצלנו, $f(1,1)=(3,3)$ ולכן

$$J_{f^{-1}}(3,3)=\left(J_f(1,1)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 5</u>

תהי $f(x,y,z)=(e^x\sin z,e^y\cos z,e^z xy)$

א) הוכיחו ש f דיפאומורפיזם בסביבת $(0,1,0)$.

ב) מצאו את $\det\left(J_{f^{-1}}(0,e,0)\right)$ (היעקוביאן של הפונקציה ההפוכה בנקודה $(0,e,0)$)

<u>פתרון:</u>

א) הפונקציה $f(x,y,z)=(e^x\sin z,e^y\cos z,e^z xy)$ היא דיפאומורפיזם בסביבת $(0,1,0)$ כי מתקיימים התנאים הבאים: $f\in C^1(\mathbb{R}^3)$ וכן מטריצת יעקובי בנקודה הפיכה.

ב) נשים לב ש$f(0,1,0)=(0,e,0)$ מכיון ש $J_{f^{-1}}(0,e,0)$ ו- $J_{f^{-1}}(0,e,0)$ מטריצות הופכיות זו לזו, ידוע כי $\det\left(J_{f^{-1}}(0,e,0)\right)=\dfrac{1}{\det\left(J_f(0,1,0)\right)}$ (מבוסס על כך שמכפלת הדטרמינטות של מטריצות הופכיות זו לזו שווה ל-1) כל שנותר הוא לחשב את $\det\left(J_f(0,1,0)\right)$.