פתרון תרגיל 4 – לינארית

1. תהי A מטריצה הפיכה. הוכיחו את הטענות הבאות:

1.1. קיימת ל A מטריצה הופכית יחידה.

הוכחה: נניח כי B,C מטריצות הפיכות של A. מספיק להוכיח: $B=C$.
B,C מטריצות הפיכות של A לכן, $AB=BA=I$ וכן $AC=CA=I$.
לכן, $B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$. מש"ל.

1.2. A^t הפיכה.

הוכחה: A מטריצה הפיכה, לכן קיימת מטריצה B כך ש $AB=I$.
נפעיל שיחלוף על שני הצדדים ונקבל,

$$(AB)^t=I^t \Rightarrow$$
$$B^tA^t=I$$

לכן A^t הפיכה משמאל ולכן הפיכה. מש"ל.

1.3. A^5 הפיכה.

הוכחה: נתון A מטריצה הפיכה. נוכיח באינדוקציה כי לכל n טבעי A^n הפיכה ונקבל בפרט, A^5 הפיכה.
עבור $n=1$, נתון כי $A^n=A^1=A$ הפיכה.
נניח כי A^n הפיכה ונוכיח בהסתמך על כך כי A^{n+1} הפיכה.
A^n הפיכה לכן קיימת $(A^n)^{-1}$. בנוסף, נתון כי A הפיכה, לכן קיימת A^{-1}.
אבל, $A^{n+1}((A^n)^{-1}A^{-1})=(AA^n)((A^n)^{-1}A^{-1})=A(A^n)(A^n)^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$
לכן A^{n+1} הפיכה מימין ולכן הפיכה.

2. תהא $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(F)$. נסמן $\Delta=ad-bc$. הוכיחו כי:

2.1. אם $\Delta\neq 0$ אז A הפיכה ו $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

הוכחה: נחשב: $A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$$A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=(ad-bc)I=\Delta I$$

לכן, אם $\Delta\neq 0$ אז $A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\Delta I\Rightarrow \frac{1}{\Delta}A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=I\Rightarrow A\left(\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right)=I$

ו A הפיכה מימין ולכן הפיכה. וההופכית הימנית היא ההופכית שלה לכן, $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

2.2. אם $\Delta=0$ אז A אינה הפיכה.

הוכחה: ראינו $A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \Delta I$ לכן אם $\Delta = 0$ אז $A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0$. אם $A = 0$ אז ברור כי אינה הפיכה. אחרת, גם $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \neq 0$ ו A מחלקת אפס. לכן A אינה הפיכה.

3. (סכום סדרה הנדסית של מטריצות)
תהא $A \in M_{n\times n}(F)$ כך שהמטריצה $A-I$ הפיכה. הוכיחו באינדוקציה כי לכל k טבעי,
$I + A + A^2 + \ldots + A^k = (A^{k+1} - I)(A-I)^{-1}$.

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה על k.
עבור $k=1$: נראה כי $I + A = (A^{1+1} - I)(A-I)^{-1}$.
אבל, $(A^{1+1} - I)(A-I)^{-1} = (A^2 - I)(A-I)^{-1} = (A+I)(A-I)(A-I)^{-1} = (A+I) = I + A$
לכן הטענה מתקיימת עבור $k=1$.
נניח כי הטענה מתקיימת עבור k טבעי ונוכיח, בהסתמך על כך כי הטענה מתקיימת עבור $k+1$.
צ"ל כי $I + A + A^2 + \ldots + A^{k+1} = (A^{k+2} - I)(A-I)^{-1}$.
אבל,

$$I + A + A^2 + \ldots + A^{k+1} = (I + A + A^2 + \ldots + A^k) + A^{k+1} \underset{induction\_hypothesis}{=} (A^{k+1} - I)(A-I)^{-1} + A^{k+1}$$

$$= (A^{k+1} - I)(A-I)^{-1} + A^{k+1}(A-I)(A-I)^{-1} \underset{distributivity}{=} [(A^{k+1} - I) + A^{k+1}(A-I)](A-I)^{-1}$$

$$= [A^{k+1} - I + A^{k+2} - A^{k+1}](A-I)^{-1} = (A^{k+2} - I)(A-I)^{-1}$$

לכן הטענה מתקיימת עבור $k+1$.

4. תהי A מטריצה ריבועית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

4.1 אם $A + A^2$ הפיכה אז A הפיכה.

הוכחה: נתון כי $A + A^2 = A(I + A)$ הפיכה. לכן, מכיוון שמכפלה של מטריצות היא מטריצה הפיכה אם ורק אם כל אחת מהמטריצות במכפלה הפיכות, A מטריצה הפיכה.

4.2 אם A הפיכה אז $trace(A) \neq 0$.

הפרכה: נפריך את הטענה באמצעות דוגמה נגדית. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ מטריצה הפיכה ($A^2 = I$)
אבל $trace(A) = 1 + (-1) = 0$.

4.3 אם $A^2 = A$ אז $A = I$ או A אינה הפיכה.

הוכחה: נתון כי $A^2 = A$. צ"ל כי $A = I$ או A אינה הפיכה. אם $A = I$ סיימנו. לכן, נניח כי $A \neq I$. מ"ל: A אינה הפיכה.
אבל, $A^2 = A \Rightarrow A^2 - A = 0 \Rightarrow A(A-I) = 0$. $A \neq I$ לכן $A - I \neq 0$ לכן, A מטריצה מחלקת אפס. לכן A אינה הפיכה.

4.4 אם ב A יש עמודת אפסים אז A אינה הפיכה.

הוכחה: נניח בשלילה כי A הפיכה. אזי, קיימת B כך ש $BA=I$. אבל, ב A יש עמודת אפסים נניח כי $C_j(A)=0$. לכן, לפי כפל עמודה עמודה:

$$
\begin{aligned}
&BA=I \Rightarrow\\
&C_j(BA)=C_j(I)\Rightarrow\\
&BC_j(A)=C_j(I)\Rightarrow\\
&B0=e_j \Rightarrow\\
&0=e_j
\end{aligned}
$$

4.5.סתירה. לכן A אינה הפיכה.

5. עבור המטריצות הבאות A ,

5.1.קבעו האם A הפיכה.

5.2.אם A הפיכה:

5.2.1. מצאו את A^{-1} .

5.2.2. הציגו את A ואת A^{-1} כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

- $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ -1 & -1 & 5\\ 2 & 7 & -3\end{pmatrix}$

פתרון : נכתוב $(A|I)$ ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 7 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[(2)R_3-2R_1]{(1)R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 5 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{(3)R_3-3R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -5 & -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{(4)\frac{1}{2}R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2.5 & -1.5 & 0.5\end{array}\right)\xrightarrow[(6)R_2-R_3]{(5)R_1+4R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & -9 & -6 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3.5 & 2.5 & -0.5\\ 0 & 0 & 1 & -2.5 & -1.5 & 0.5\end{array}\right)\xrightarrow{(7)R_1-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -16 & -11 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 3.5 & 2.5 & -0.5\\ 0 & 0 & 1 & -2.5 & -1.5 & 0.5\end{array}\right)$$

קיבלנו בצד שמאל את מטריצת היחידה לכן, A הפיכה ו

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-16 & -11 & 3\\ 3.5 & 2.5 & -0.5\\ -2.5 & -1.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

נציג את A ואת A^{-1} כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

נמספר את הפעולות האלמנטריות שביצענו על המטריצה אזי $A^{-1}=E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$ ו $A=(A^{-1})^{-1}=E_1^{-1}E_2^{-2}E_3^{-3}E_4^{-4}E_5^{-5}E_6^{-6}E_7^{-7}$ כאשר E_i המטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולה ה - i .

לכן,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&-1\\7&-1&1\end{pmatrix}$

פתרון : נכתוב $(A|I)$ ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\2&1&-1&0&1&0\\7&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-7R_1]{R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&3&-3&-2&1&0\\0&6&-6&-7&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&3&-3&-2&1&0\\0&0&0&-3&-2&1\end{array}\right)$$

קיבלנו בצד שמאל מטריצה עם שורת אפסים לכן לא ניתן לדרג את A למטריצת היחידה.
לכן, A אינה הפיכה.

- $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&-1&5\\2&0&-3\end{pmatrix}$

פתרון : נכתוב $(A|I)$ ונדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\frac{1}{3}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)R_3-2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)\frac{R_3}{-\frac{11}{3}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \end{array}\right) \xrightarrow[(5)R_2-5R_3]{(4)R_1-\frac{1}{3}R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{10}{11} & 1 & \frac{15}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{(6)(-1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{11} & -1 & -\frac{15}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \end{array}\right)$$

קיבלנו בצד שמאל את מטריצת היחידה לכן, A הפיכה ו

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ \frac{10}{11} & -1 & -\frac{15}{11} \\ \frac{2}{11} & 0 & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

נציג את A ואת A^{-1} כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

נמספר את הפעולות האלמנטריות שביצענו על המטריצה אזי $A^{-1} = E_6E_5E_4E_3E_2E_1$ ו $A = (A^{-1})^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-2}E_3^{-3}E_4^{-4}E_5^{-5}E_6^{-6}$ כאשר E_i המטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולה ה - i.
לכן,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. פתרו את מערכות המשוואות הבאות באמצעות מציאת מטריצה הופכית. אם המטריצה המתאימה למערכת אינה הפיכה, פתרו באמצעות דירוג.

6.1 $\begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ 4x-y+5z=6 \\ x+2y-z=-3 \end{cases}$

פתרון: נכתוב

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ונסמן

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

אזי

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\vec{b}$$

נחפש A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-4R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1.5 & 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-1.5R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{6}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2+\frac{11}{3}R_3]{R_1+1.5R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0.5 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{36} & \frac{11}{18} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-0.5R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{36} & -\frac{1}{18} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{36} & \frac{11}{18} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

קיבלנו בצד שמאל את מטריצה היחידה לכן, A הפיכה ו

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{36} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{36} & \frac{11}{18} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

לכן נכפול משמאל ב A^{-1} את השוויון

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\vec{b}$$

ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\vec{b}$$

כלומר, הפתרון למערכת המשוואות הוא:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\vec{b}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{36} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{36} & \frac{11}{18} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.2. $\begin{cases} x-4y+z=5 \\ 2x-y-2z=3 \\ 3x-5y-z=10 \end{cases}$

פתרון: נסמן,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

אזי

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\vec{b}$$

נחפש A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

קיבלנו בצד שמאל מטריצה עם שורת אפסים לכן לא ניתן לדרג את המטריצה הנתונה למטריצת היחידה. לכן, A אינה הפיכה.

כלומר, לא ניתן לפתור את מערכת המשוואות באמצעות מציאת מטריצה הופכית.

הערה: העובדה ש A אינה הפיכה משמעה שלמערכת המשוואות הנתונה אין פתרון יחיד. לכן, או שלמערכת אין פתרון או שיש לה אינסוף פתרונות.

נפתור את מערכת המשוואות באמצעות דירוג מטריצות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -4 & -7 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

קיבלנו שורת אפסים שהאיבר המתאים לה בעמודת הפתרון אינו אפס, כלומר קיבלנו את המשוואה

$$0 = 2$$

לכן, אין פתרון למערכת הנתונה.

בהצלחה! ☺