16/07/18

פתרון מבחן מועד א' – 88-133 אינפי 2 תשע"ח

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}+1}dx$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}+1}dx = \begin{Bmatrix} t=\sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ 2tdt = dx \end{Bmatrix} = \int \frac{2t}{t^2+t+1}dx =$$

$$= \int \frac{2t+1}{t^2+t+1}dx - \int \frac{1}{t^2+t+1}dx = \ln\left|t^2+t+1\right| - \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \ln\left|t^2+t+1\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+c = \ln\left|x+\sqrt{x}+1\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

ב. $\int 2e^{\left(x^2+\ln(x)\right)}dx$

$$\int 2e^{\left(x^2+\ln(x)\right)}dx = \int 2e^{\ln(x)}e^{\left(x^2\right)}dx = \int 2xe^{\left(x^2\right)}dx = \begin{Bmatrix} t=x^2 \\ dt=2xdx \end{Bmatrix} = \int e^t dt = e^t + c = e^{\left(x^2\right)} + c$$

2. קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים והוכיחו קביעתכם.

א. $\int_0^\infty e^{\left(-x^2\right)}dx$

ראשית מדובר בפונקציה רציפה בכל הממשיים, לכן הנקודה הבעייתית היחידה היא באינסוף.

שנית, מספיק לבדוק את התכנסות האינטגרל $\int_1^\infty e^{\left(-x^2\right)}dx$ כיוון שהאינטגרל $\int_0^1 e^{\left(-x^2\right)}dx$ אמיתי.

כעת, כיוון שמדובר בפונקציה חיובית מותר להשתמש במבחן ההשוואה:

$$\int_1^\infty e^{\left(-x^2\right)}dx \le \int_1^\infty 2xe^{\left(-x^2\right)}dx = \begin{Bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{Bmatrix} = \int_1^\infty e^{-t}dx = \left[-e^{-t}\right]_1^\infty = 1$$

כיוון שהאינטגרל הגדול יותר מתכנס, לפי מבחן ההשוואה גם האינטגרל שלנו מתכנס.

(הערה: היה אפשר להשתמש גם במבחן ההשוואה הגבולי מול אינטגרלים מוכרים.)

ב. $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{e^x - e}dx$

הנקודות החשודות הן נקודות אי הרציפות $x = 0,1$, בנוסף לאינסוף שבעייתית תמיד.

נעזר בחישוב הגבולות על מנת לראות מתי הפונקציה אינה חסומה.

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{e^x - e} \underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{1}{e}$$

לכן בנקודה $x = 1$ יש אי רציפות סליקה, הפונקציה חסומה והאינטגרל שם אמיתי.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{e^x - e} = \frac{-\infty}{1-e} = \infty$$

לכן $x = 0$ נקודה בעייתית.

נפצל את האינטגרל לשני קטעים $\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{e^x - e}dx, \int_0^1 \frac{\ln(x)}{e^x - e}dx$, ונשים לב שבשני הקטעים הפונקציה חיובית (בקטע השמאלי גם המונה וגם המכנה שליליים, וסה"כ הפונקציה חיובית.)

בצד השמאלי, נראה ש $\int_0^1 \left(-\ln(x)\right)dx \sim \int_0^1 \frac{\ln(x)}{e^x-e}\,dx$ חברים.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln(x)}{e^x-e}}{-\ln(x)} = \frac{1}{e-1} > 0$$

ראינו בכיתה שהאינטגרל $\int_0^1 \left(-\ln(x)\right)dx$ מתכנס, ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס בקטע.

למי שלא זוכר, נחשב בכל זאת: $\int_0^1 \left(-\ln(x)\right)dx = \lim_{t\to 0^+} \left[x - x\ln(x)\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \left(1 - t + t\ln(t)\right) = 1$

בצד הימני, נעשה מבחן השוואה גבולי עם $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

$$0 \le \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{e^x-e}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\ln(x)}{e^x-e} \le \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x-e} \underset{L'\text{Hopital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \ldots = 0$$

כלומר המונה "קטן" מהמכנה, וכיוון שהאינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ מתכנס, כך גם האינטגרל שלנו.

סה"כ האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{e^x-e}\,dx$ מתכנס.

.3

א. קרבו את $\frac{1}{\sqrt{8}}$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

נקרב באמצעות פולינום טיילור, ונחסום את השגיאה לפי שארית טיילור בצורה לגראנז'.

נקרב את הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ בנקודה הרצוייה $x=8$ סביב הנקודה המצוייה $a=9$.

ננחש כי סדר $n=2$ הוא מספיק טוב, ונבדוק:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'''(x)=-\frac{15}{8}x^{-\frac{7}{2}}$$

לכן קיימת $8<c<9$ כך שהשגיאה הינה $R_2(8,9)=\frac{f'''(c)}{3!}(8-9)^3$.

$$\left|R_2(8,9)\right|=\frac{15}{8\cdot 3!}\cdot\frac{1}{c^{\frac{7}{2}}}\underset{8<c}{\leq}\frac{15}{48\left(\sqrt{8}\right)^7}\leq\frac{15}{48\left(\sqrt{4}\right)^7}\leq\frac{15}{48\cdot 2^7}<\frac{1}{100}$$

לכן קירוב מספיק טוב מתקבל מפולינום טיילור מסדר 2, כלומר

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\approx P_2(8,9)=f(9)+f'(9)(8-9)+\frac{f''(9)}{2}\left(8-9\right)^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 3^3}+\frac{3}{2\cdot 4\cdot 3^5}$$

ב. האם הקירוב שלכם בסעיף א' גדול או קטן מ $\frac{1}{\sqrt{8}}$?

הקירוב שלנו הוא $P_2(8,9)$. השגיאה הינה $R_2(8,9)=\frac{1}{\sqrt{8}}-P_2(8,9)=-\frac{15}{8\cdot 3!}\cdot\frac{1}{c^{\frac{7}{2}}}\left(-1\right)^3>0$.

לכן הקירוב קטן יותר מ $\frac{1}{\sqrt{8}}$, כלומר $P_2(8,9)<\frac{1}{\sqrt{8}}$.

4. קבעו האם סדרות הפונקציות הבאות מתכנסות במ"ש בקטעים הנתונים, והוכיחו קביעתכם.

א. $f_n(x)=\frac{n^x}{x^n}$ בקטע $(1,2)$.

ראשית, נחשב את פונקציית הגבול.

עבור $x\in(1,2)$ קבוע, מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}\frac{n^x}{x^n}=0$, ולכן פונקציית הגבול היא $f(x)=0$.

הסבר לחישוב הגבול: לצורך נוחות ההבנה, נחליף את הקבוע x בסימן a.

נשים לב כי $\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a^{\frac{n}{a}}}\right)^a$, נחשב את הגבול הפנימי $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^{\frac{n}{a}}}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty},a>1}{=}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a}a^{\frac{n}{a}}\ln(a)}=\frac{1}{\infty}=0$.

במילים פשוטות (ולא מדויקות), האקספוננט a^n במכנה, 'מנצח' את n^a במונה (סדרי גודל).

(אם נציב למשל $x=1.5$ נקבל $f_n(1.5)=\frac{n^{1.5}}{(1.5)^n}$.)

כעת סדרת החסמים מקיימת $d_n=\sup_{x\in(1,2)}\left|\frac{n^x}{x^n}\right|\geq n$ כיוון ש $\lim_{x\to1^+}\frac{n^x}{x^n}=n$,

לכן $d_n\to\infty$ ואין התכנסות במידה שווה.

ב. $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{n+x}$ בקטע $(0,1)$.

ראשית, $\left|\frac{\sin(nx)}{n+x}\right|\underset{x>0}{\leq}\frac{1}{n}\to0$ ולכן פונקציית הגבול הינה $f(x)=0$.

אבל בעצם סדרת החסמים גם מקיימת $d_n=\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{\sin(nx)}{n+x}\right|\leq\frac{1}{n}\to0$ ולכן יש התכנסות במ"ש בקטע.

5. תהי f פונקציה אינטגרבילית ואי שלילית בקטע $[0,1]$ כך ש $\int_0^1 f(x)dx=1$.

א. הוכיחו/הפריכו: בכל תת-קטע $I\subseteq[0,1]$ קיימת נקודה $x\in I$ כך ש $f(x)\ge x$.

הפרכה:

נביט בפונקציה $f(x)=\begin{cases}2 & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$

כעת $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} 2dx=[2x]_0^{\frac{1}{2}}=1$, אך בתת הקטע $I=\left[\frac{3}{4},1\right]$ לכל $x\in I$ מתקיים כי $0=f(x)<x$

ב. הוכיחו/הפריכו: קיימת בקטע נקודה $x\in[0,1]$ עבורה $f(x)>x$.

הוכחה:

נניח בשלילה כי לכל $x\in[0,1]$ מתקיים כי $f(x)\le x$.

לכן $\frac{1}{2}=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\int_0^1 xdx\ge\int_0^1 f(x)dx=1$ בסתירה.