פתרון מבחן מועד א – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 08/07/19

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^{10}\right)e^{\sin(7x)}}{\left(1-\cos(5x)\right)^5}$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(x^{10})}{x^{10}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{e^{\sin(7x)}}_{\to e^0=1}\cdot\left(\underbrace{\frac{(5x)^2}{1-\cos(5x)}}_{\to 2}\right)^5\cdot\frac{1}{5^{10}}=\frac{2^5}{5^{10}}$$

ב. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{2+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}<1$$

כעת

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{1}{2+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\{\text{אפיסה}\cdot\text{חסומה}\}=0$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}$

נעשה מבחן המנה

$$\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n}=\frac{3}{n+1}\to 0$$

כיוון שגבול המנה קטן מאחד הסדרה המקורית שואפת לאפס.

2.

א. חשבו את $\int\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}dx$.

נזהה שמדובר בפונקציה רציונאלית.

דרגת המונה קטנה ממש מדרגת המכנה, נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$x = A(x+2)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1)$$

נציב $x = -1$

$$-1 = A$$

נציב $x = -2$

$$-2 = -C$$

נציב $x = 0$

$$0 = -4 + 2B + 2$$

$$B = 1$$

ולכן

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

האינטגרל הוא

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2} dx = -\ln|x+1| + \ln|x+2| - \frac{2}{x+2}$$

כאשר

$$\int \frac{2}{(x+2)^2} dx = 2\int (x+2)^{-2} dx$$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+2} dx$.

מדובר באינטגרל חיובי

$$\frac{1}{x^2+2} < \frac{1}{x^2}$$

וכיוון ש $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס, כך גם האינטגרל שלנו לפי מבחן ההשוואה הראשון.

3. תהי $a \in \mathbb{R}$.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x = \arctan(x) + a$, הוכיחו תשובתכם.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = x - \arctan(x) - a$$

אנחנו צריכים לדעת כמה שורשים יש לפונציה h (כלומר כמה חיתוכים עם ציר האיקס)

נגזור

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \geq 0$$

לכן הפונקציה h עולה וחותכת לכל היותר פעם אחת את הציר.
(שימו לב שהפונקציה עולה ממש, כי הנגזרת מתאפסת רק בנקודה אחת).

מצאנו תחום עלייה $(-\infty,\infty)$ נבדוק את הגובה בקצוות.

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\left\{-\infty-\left(-\frac{\pi}{2}\right)-a\right\}=-\infty$$

באופן דומה

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\infty$$

ולכן קיימות נקודות $x_1<x_2$ כך ש

$$h(x_1)<0, h(x_2)>0$$

בקטע $[x_1,x_2]$ הפונקציה h רציפה ולכן לפי ערך הביניים קיימת נקודה בה h חותכת את הציר בקטע, סה"כ חיתוך יחיד

ולכן פתרון יחיד למשוואה המקורית.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{\arctan(x)}{x}=1$, הוכיחו תשובתכם.

אנחנו מזהים קשר לסעיף א'.

אם נכפול בx (האם אין בזה בעייה? נראה בהמשך) נקבל את המשוואה

$$x=\arctan(x)$$

וזה בדיוק המשוואה מסעיף א' כאשר בוחרים $a=0$

לכן מסעיף א', למשוואה $x=\arctan(x)$ יש פתרון יחיד.

קל לראות שהפתרון הוא $x=0$.

כיוון שהפתרון יחיד, לכל $x\neq 0$ אין פתרון למשוואה $x=\arctan(x)$

ולכן לכל $x\neq 0$ מותר לחלק בx ונקבל שאין פתרון למשוואה

$$1=\frac{\arctan(x)}{x}$$

ולכן אין כלל פתרונות למשוואה המקורית, הרי אסור לחלק באפס.

(בעצם הכפל בx בהתחלה הוסיף פתרונות למשוואה כי הוא אפשר לכפול באפס).

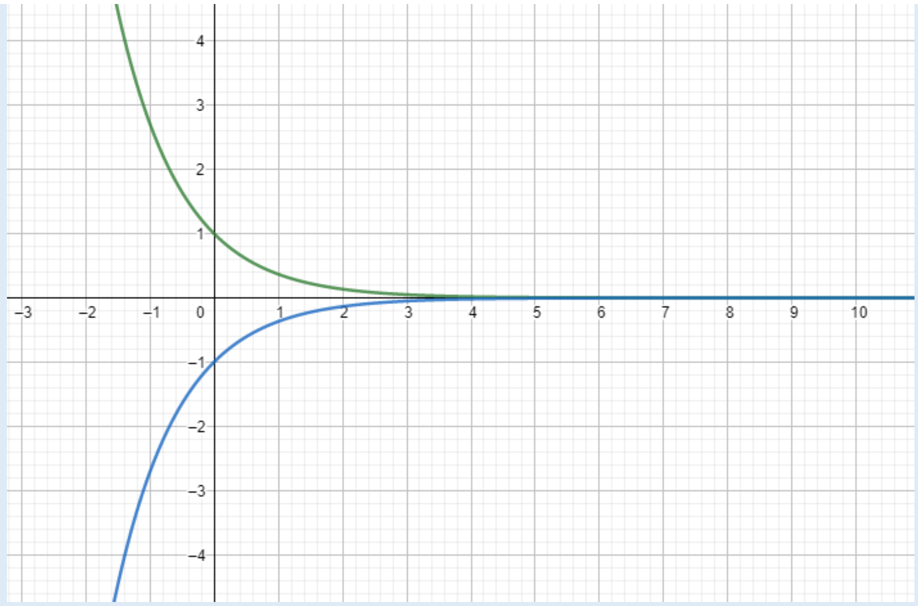
4. תהיינה פונקציות f,g הגזירות בכל הממשיים, כך ש $f'(x)>g'(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

א. הוכיחו/הפריכו: לכל שתי נקודות $a<b$ מתקיים $f(b)\geq g(a)$.

העובדה שהנגזרת של פונקציה אחת גדולה מהנגזרת של פונקציה אחרת לא אומרת כלום על הקשר בין הפונקציות

הפרכה:

$$f(x)=-e^{-x}$$
$$g(x)=e^{-x}$$



מתקיים כי בכל הממשיים $f' > g'$ אבל גם בכל הממשיים $f < g$

ב.   הוכיחו/הפריכו: לכל שתי נקודות $a < b$ מתקיים $f(b) - f(a) \geq g(b) - g(a)$.

רעיון מאד הגיוני – זה מזכיר לנו את לגראנז'

$$b - a > 0$$

לכן מותר לחלק בו ולקבל אי שיוויון שקול

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

לפי לגראנז'

$$f'(c_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(c_2) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

האמנם בהכרח

$$f'(c_1) \geq g'(c_2)$$

?

לא, כיוון שמדובר בנקודות שונות.

אמנם הכיוון היה הגיוני, אך פתרון זה אינו עובד.

רעיון נוסף – נעביר אגפים ונסדר את אי השיוויון

$$f(b) - g(b) \geq f(a) - g(a)$$

ניתן להגדיר פונקציה

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

אנחנו צריכים להראות ש

$$h(b) \geq h(a)$$

כלומר רוצים להראות כי h עולה.

אכן

$$h' = f' - g' > 0$$

5. תהי סדרה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מקיימת את נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$, ונניח $0 < a_1 < 1$.

א. הוכיחו כי הסדרה a_n מונוטונית עולה.

אכן

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 \geq 0$$

ולכן הסדרה עולה.

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

כיוון שהסדרה עולה היא חסומה ושואפת לגבול סופי, או שאינה חסומה ושואפת לאינסוף.

אם הסדרה חסומה, נסמן את גבולה $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim (a_n^2 + a_n)$$

$$L = L^2 + L$$

ולכן

$$L^2 = 0$$

ולכן

$$L = 0$$

כיוון שהסדרה עולה גבולה גדול או שווה לאיבר הראשון

$$0 < a_1 \leq L = 0$$

סתירה, ולכן הסדרה <u>אינה חסומה</u> ולכן $a_n \to \infty$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{n^2} + \frac{1}{n} \right]$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n} + 1\right)$$

זו סדרת סכומי רימן של $f(x) = x + 1$ הרציפה ב$[0,1]$ ולפי המשפט שראינו בכיתה מתקיים כי

$$a_n \to \int_0^1 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)_0^1 = \frac{3}{2}$$

שימו לב!!! לא לרשום $a_n = \int_0^1 (x+1)dx$ הרי סכומי רימן לא בהכרח שווים לאינטגרל רק מתקרבים אליו, והסדרה אינה קבועה!

ב. קרבו את $1-\cos(1)$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

נבחר בפונקציה

$$f(x) = 1 - \cos(x)$$

הנקודה המצוייה היא אפס, הרצוייה היא 1

השגיאה בפיתוח עד סדר n היא

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}$$

כאשר $0 < c < 1$

כיוון שכל הנגזרות הן פלוס או מינוס קוסינוס או סינוס ניתן לומר כי

$$|R_n| \le \frac{1}{(n+1)!}$$

עבור $n = 4$ מקבלים את הקירוב הרצוי כי $\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$

הקירוב הוא

$$1 - \cos(1) \approx f(0) + f'(0)\cdot 1 + \frac{f''(0)}{2}\cdot 1^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\cdot 1^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\cdot 1^4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4!}$$

תזכורת – בשביל הקירוב הצבנו בנוסחא של פולינום טיילור:

$$P_n(f,a)(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$