

## בוחרן 1 במתמטיקה בדידה 2 83-118 סמסטר ב' תשע"ה

הוראות: ענו על **שלוש שאלות** מתוך ארבע. לכל השאלות משקל זהה. כתבו בכתב ברור בעט כחול או שחור. אין להשתמש בכל חומר עזר, גם לא במחשבון. **משך הבוחן:** 90 דקות.

**שאלה 1** (אי-שיוויון ברנולי). יהי  $x > 0$  מספר ממשי. הוכיחו כי לכל מספר טבעי  $n \geq 2$  מתקיים  $(1+x)^n > 1+nx$ .

**שאלה 2.** נגדיר באופן רקורסיבי פונקציה  $g(n)$ : אם  $p$  הוא מספר ראשוני, אז  $g(p) = p$ . אחרת,  $g(n) = \sum_{p|n} g(p)$  לכל  $n \geq 2$ . כלומר עבור כל  $n$ , ערך הפונקציה  $g(n)$  הוא הסכום של ערכי הפונקציה בכל ראשוני  $p$  שמחלק את  $n$ . דוגמה לכמה ערכים של הפונקציה:

$$g(2) = 2, g(3) = 3, g(4) = 2, g(10) = g(2) + g(5) = 7$$

הוכיחו בעזרת אינדוקציה שלכל מספר טבעי  $n \geq 2$  מתקיים  $g(n) \leq n$ .

**שאלה 3.** בכיתה יש 30 תלמידים. רוצים לחלק להם קובעים לכבוד מסיבה: 7 קובעי ליצן, 18 מצנפות שינה ו-5 סומבררוס, כך שכל תלמיד יחבוש בדיוק קובע אחד. מה מספר הדרכים לעשות זאת?

**שאלה 4.** אתם מעוניינים לשלוח חבילה בדואר, ויש עמלת ביול מינימלית של 12 אגורות. הוכיחו בעזרת אינדוקציה כי ניתן לשלם כל סכום של 12 אגורות או יותר רק עם בולים של 4 אגורות ושל 5 אגורות. רמז: בפועל יש להוכיח שכל מספר  $n \geq 12$  ניתן להציג בצורה  $n = 4x + 5y$  עבור  $x, y$  לא שליליים. שימו לב איזה מקרים נכללים בשלב הבסיס ומה צריך להוכיח בשלב האינדוקציה.

בהצלחה!

---

<sup>1</sup>כל מספר טבעי  $n > 1$  ניתן לרשום כמכפלה של מספרים ראשוניים. מכפלה כזאת נקראת פירוק של  $n$  לגורמים ראשוניים. הפירוק הוא יחיד עד כדי סדר האיברים במכפלה.