

מבחן מועד ב' בקורס 83-118 תש"ף מתמטיקה בדידה 2 (הנדסה)

מרצה: תומר באואר
מתרגל: אריאל ויצמן

הוראות יש לפתור את כל ארבע השאלות. לכל השאלות ניקוד זהה.

1. **משך המבחן** הוא שעתיים וחצי.
2. **חומר העזר** הוא פתוח, אך מודפס בלבד או שכתבתם בעצמכם. כלומר אין להשתמש בטלפון, במחשב או בכל אמצעי אלקטרוני אחר. הציגו למשגיחים את כל חומר העזר שלכם לפני תחילת המבחן.
3. **שימוש במחשבון** מדעי רגיל מותר. שוב, אסור שימוש בטלפון, במחשב או בכל אמצעי אלקטרוני אחר לחישובים.
4. כתבו את הפתרון לכל שאלה **בדף נפרד** ונמקו אותו היטב.
5. אפשר **לכתוב "לא יודעים"** בתור הפתרון לשאלה שלמה ולקבל 5 נקודות עבורו. אפשרות זו תתקבל רק לפתרון שהוא ריק לחלוטין לשאלה שלמה (לא סעיף) פרט למילים "לא יודעים" וללא שום פתרון חלקי לידו.
6. כתבו בעט כחול או שחור באופן ברור.
7. בשאלות שבהן התשובה הסופית היא מספר או נוסחה סגורה אין להשתמש עבודה בסימן הסכום \sum , סימן המכפלה \prod או שלוש נקודות.

עצות בכתיבה הנה כמה נקודות שכדאי לדעת כאשר אתם עונים על המבחן:

1. לחומר העזר ניתן להסתפק בדף הנוסחאות למבחן, ואפילו לא צריך מחשבון.
2. בכתיבת פתרון אתם צריכים להעביר את הידע שלכם מן הראש אל הדף. זה לא מספיק לדעת או להבין מה צריך להיות הפתרון לשאלות, אלא גם לתקשר את הידע וההבנה האלו.
3. חלקו את זמנכם בתבונה. נסו לעבור על כל השאלות ולכתוב טיוטה מהירה לרעיון הראשוני של דרך הפתרון, ואז כתבו פתרון מלא לשאלות שאתם יודעים לענות עליהן.
4. אנחנו לא קוראי מחשבות, ולכן אתם צריכים לכתוב את מה שאתם רוצים שנדע, ורק את מה שרלוונטי לפתרון. כתבו בכתב מסודר, עם משפטים מלאים ועם נימוקים והסברים לכל מה שדרוש נימוק או הסבר. כאשר משתמשים בביטויים כמו "קל לראות...", "ברור ש...", "מסיקים מייד כי...", אז צריך להוכיח את הדברים האלו. זה הרי צריך להיות קל, ברור ומייד.
5. לשאלה מסויימת יכולים להיות כמה פתרונות נכונים שונים. מצד שני, יכולים להיות לה גם הרבה פתרונות שגויים שונים. לפעמים אחד מהפתרונות הנכונים הוא יותר פשוט, או יותר קצר, או דומה למה שראינו בכיתה מאשר שאר הפתרונות. זה בסדר גמור לענות עם פתרון אחר, ובכל מקרה צריך להראות שהוא נכון ולא שגוי.

שאלות

שאלה 1. תהי B מטריצה אינסופית שהאיבר במקום ה- (n, k) שלה הוא $\binom{n}{k}$ לכל $n, k \in \mathbb{N}_0$. במילים אחרות, זו מטריצה שהאיברים שלה מאונדקסים לפי $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ומתקיים $B_{n,k} = \binom{n}{k}$. הזכרו שהסכמנו כי $\binom{0}{0} = 1$ ושם $n \geq 0, k > n$ אז $\binom{n}{k} = 0$.

1. (20 נק') הוכיחו כי האיבר במקום ה- (i, j) של B^2 הוא $\binom{i}{j} 2^{i-j}$.

2. (5 נק') מצאו נוסחה סגורה לסכום השורה ה- n של B^2 .

שאלה 2. יהי s_n מספר הפתרונות של המשוואה בשלמים

$$x_1 + \dots + x_{10} = n$$

כאשר $x_i > 0$ זוגי אם i זוגי, ואילו $x_i > 0$ אי זוגי אם i אי זוגי.

1. (15 נק') מצאו נוסחה סגורה לפונקציה היוצרת של הסדרה s_0, s_1, s_2, \dots .

2. (10 נק') מצאו את s_{2021} .

שאלה 3. קבוצה של $n > 1$ אנשים נכנסים למסעדה ומתיישבים סביב שולחן עגול. הם הספיקו לפטפט רק עם השכנים מימין ומשמאל שלהם, וכבר מבקשים מהם לקום מהשולחן הראשון ולעבור לשולחן עגול אחר.

מצאו נוסחה למספר הדרכים t_n להתיישב מחדש כך שלכל אחד השכן מימין הוא שונה וגם השכן משמאל הוא שונה (ממה שהיה בשולחן הראשון). למשל $t_3 = 3$ ו- $t_4 = 4$. הערה: לספור את מספר הדרכים להתיישב מחדש כך שאף אחד לא יושב ליד שכן כלשהו מהשולחן הראשון זה יותר מסובך. אפשר לענות על זה במקום, אבל ללא בונוס.

שאלה 4. יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט. נגדיר גרף חדש $\text{Cor}(G) = (V', E')$ הנקרא העטרה (הקורונה) של G המרחיב את G באופן הבא: הגרף $\text{Cor}(G)$ כולל את כל הקודקודים והצלעות של G ולכל קודקוד $v \in V$ מוסיפים שני קודקודים חדשים v', v'' ואת שלוש הצלעות $\{v, v'\}, \{v, v''\}$ ו- $\{v', v''\}$.

1. (5 נק') ידוע שאם G מישורי, אז גם $\text{Cor}(G)$ מישורי. הראו, למשל על ידי ציור, כי הגרף $\text{Cor}(K_{2,3})$ הוא מישורי.

2. (20 נק') נגדיר רקורסיבית את העטרה ה- m של G להיות

$$\text{Cor}_m(G) := \begin{cases} G & m = 0 \\ \text{Cor}(\text{Cor}_{m-1}(G)) & m > 0 \end{cases}$$

מצאו כמה קודקודים, כמה צלעות וכמה פאות יש בייצוג מישורי של $\text{Cor}_{10}(K_{2,3})$.