### המשך מפעם שעברה

## תרגיל

סווגו את המשטח הריבועי הבא:

$$9x^2+5y^2+5z^2+12xy+6xz+5x-6y-3z=2$$

### פתרון

כאן $A=\begin{pmatrix}9&6&3\\6&5&0\\3&0&5\end{pmatrix}$. ע"ע: $\begin{array}{rcl}\lambda_1&=&14\\\lambda_2&=&5\\\lambda_3&=&0\end{array}$ . נמצא ו"ע:

עבור $\lambda_1$:

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$A\vec{v}_1=\lambda_1\vec{v}_1$$

$$\left(A-\lambda_1 I\right)\vec{v}_1=0$$

$$\begin{pmatrix}-5&6&3\\6&-9&0\\3&0&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

משוואה 3:

$$3a-9c=0\implies\boxed{a=3c}$$

משוואה 2:

$$6a-9b=0$$

$$6a=9b$$

$$6\cdot 3c=9b$$

$$2c=b$$

$$\implies\vec{v}_1=\begin{pmatrix}3c\\2c\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\qquad\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$$

ניקח $c = \frac{1}{\sqrt{14}}$ בכדי לקבל $\|\vec{v}_1\| = 1$:

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

באופן דומה:

$$\hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \hat{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{70}} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

המטריצה המלכסנת היא:

$$P = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{20}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} \end{bmatrix}$$

נחליף משתנים ע"י

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = P \cdot \vec{x}'$$

המשוואה הייתה

$$\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + c = 0$$

אחרי החלפת משתנים נקבל

$$\vec{x}'^T \underbrace{P^T A P}_{D} \vec{x}' + \vec{b}^T P \vec{x}' + c = 0$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & & \\ & 5 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = (5, -6, -3)$$

$$\vec{b}^T \cdot P \cdot \vec{x}' = (5, -6, -3) \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(0, 0, \frac{-70}{\sqrt{70}}\right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -\sqrt{70} z'$$

המשוואה בקואורדינטות החדשות היא:

$$14\left(x'\right)^2+5\left(y'\right)^2-\sqrt{70}z'-2=0$$

או

$$14\left(x'\right)^2+5\left(y'\right)^2=\sqrt{70}z'+2=\sqrt{70}\left(z'+\frac{2}{\sqrt{70}}\right)$$

נסמן $z''=z'+\frac{2}{\sqrt{70}}$ לקבל

$$14\left(x'\right)^2+5\left(y'\right)^2=\sqrt{70}z''$$

$$z''=\frac{\left(x'\right)^2}{\sqrt{\frac{\sqrt{70}}{14}}^2}+\frac{\left(y'\right)^2}{\sqrt{\frac{\sqrt{70}}{5}}^2}$$

קיבלנו משוואה מהצורה $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ - זהו פרבולואיד אליפטי.

### תרגיל

כנ"ל עבור

$$2x^2+16xy-7y^2+16xz+34yz-7z^2=\pm 48$$

#### פתרון

$$A=\begin{pmatrix}2 & 8 & 8\\ 8 & -7 & 17\\ 8 & 17 & -7\end{pmatrix}$$

מוצאים $\hat{v}_1,\hat{v}_2,\hat{v}_3$ ולהגדיר $P$ כמו מקודם. אחרי ההצבה $\vec{x}=P\cdot\vec{x}'$ נקבל:

$$18\left(x'\right)^2-6\left(y'\right)^2-24\left(z'\right)^2=\pm 48$$

$$+\frac{\left(x'\right)^2}{\sqrt{\frac{48}{18}}^2}-\frac{\left(y'\right)^2}{\sqrt{8}^2}-\frac{\left(z'\right)^2}{\sqrt{2}^2}=\pm 1$$

# גיאומטריה דיפרנציאלית

### הגדרה

יהיו $(X,d_X)$ ו$(Y,d_Y)$ שני מרחבים מטריים.

פונקציה $f:X\to Y$ נקראת איזומטריה אם לכל $x_1,x_2\in X$, $d_X(x_1,x_2)=d_Y(f(x_1),f(x_2))$.

## אצלנו

$X=Y=\mathbb{R}^n$ והמטריקה היא האוקלידית:

$$d((x_1,x_2,\dots x_n),(y_1,y_2,\dots y_n))=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

## תרגיל

תהיינה $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריות, $c\in\mathbb{R}$ קבוע. הוכח או הפרך:

א. $f+g$ איזומטריה

ב. אם $n=3$, $f\times g$ איזומטריה

ג. $f\circ g$ איזומטריה

ד. $c\cdot f$ איזומטריה

### פתרון

א. לא! ניקח $f(x)=g(x)=x$ פונקציית הזהות.

$$(f+g)(x)=2x$$

$$1=|1-2|=d(1,2)\neq d((f+g)(1),(f+g)(2))=d(2,4)=|2-4|=2$$

ב. לא! ניקח $g=f$ ואז $f\times g=0$ ולכן $d(f(x),f(y))=d(0,0)=0$ לכל $x,y$.
פונקציות קבועות כמו $f\times f$ לעולם לא איזומטריות!

ג. כן!

$$d(f\circ g(x_1),(f\circ g)(x_2))=d(f(g(x_1)),f(g(x_2)))=d(g(x_1),g(x_2))=d(x_1,x_2)$$

ד. לא!

$$d((cf)(x_1),(cf)(x_2))=\|cf(x_1)-cf(x_2)\|=|c|\,\|f(x_1)-f(x_2)\|=|c|\,d(f(x_1),f(x_2))=|c|\,d(x_1,x_2)$$

וזה ישמור על אותו המרחק אס"ם $|c|=1$ כלומר $c=\pm1$.

# עקומות מישוריות

עקומה (פרמטרית) מישורית היא פונקציה $\gamma(t): I \to \mathbb{R}^2$, כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ הוא קטע.
$t$ נקרא הפרמטר.

לעיתים העקומה נתונה בצורה סתומה, ע"י משוואה בשתי משתנים $F(x,y)=0$ (כמו המעגל: $x^2+y^2-1=0$).

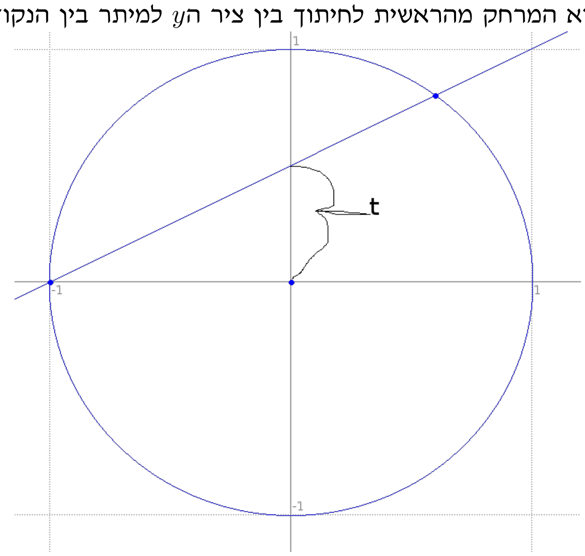
ניתן להביא את המעגל מהצורה הסתומה לפרמטריזציה ע"י הזוית שהווקטור $(x,y)$ "עושה" עם ציר ה$[x]$ החיובי:

$$\begin{aligned} x &= 1\cdot\cos t \\ y &= 1\cdot\sin t \end{aligned} \qquad t\in[0,2\pi]$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t\in[0,2\pi]$$

## תרגיל

מצאו פרמטריזציה של מעגל היחידה(לא כולל הנקודה $(-1,0)$) באמצעות האורך(המכוון) $t$ שהוא המרחק מהראשית לחיתוך בין ציר ה$y$ למיתר בין הנקודה ל$(-1,0)$:




### פתרון

נמצא היכן הישר העובר דרך הנקודות $(-1,0)$ ו$(0,t)$ פוגש את מעגל היחידה:

$$y-0=t(x+1)$$

$$y=t(x+1)$$

נציב במשוואת מעגל היחידה:

$$x^2 + (t(x+1))^2 = 1$$

$$\left(t^2+1\right)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2t^2 \pm \sqrt{4t^4 - 4\left(t^2+1\right)\left(t^2-1\right)}}{2\left(t^2+1\right)} = \frac{-2t^2 \pm 2}{2\left(t^2+1\right)} = \frac{-t^2 \pm 1}{t^2+1} \quad \begin{array}{l} \Longrightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \\ \Longrightarrow \quad \cancel{x = -1} \end{array}$$

$$y = t \cdot \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \qquad -\infty < t < +\infty$$

נוודא שזה אכן מעגל:

$$x^2 + y^2 \stackrel{?}{=} 1$$

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{1-2t^2+t^4}{\left(1+t^2\right)^2} + \frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{1+2t^2+t^4}}{\cancel{1+2t^2+t^2}} = 1 \qquad \checkmark$$

## תרגיל

מצאו פרמטר טבעי($s$) לעקומות הבאות במישור:

א. $y = mx + n$

ב. $y = x^2$

### פתרון

א. פרמטריזציה למשל היא

$$\gamma(t) = (t, mt+n)$$

$$\gamma'(t) = (1, m)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+m^2} \neq 1$$

הפרמטר הטבעי $s$ הוא:

$$s\left(t\right)=\int_{0}^{t}\left\Vert \gamma'\left(q\right)\right\Vert \,\mathrm{d}q=\int_{0}^{t}\sqrt{1+m^{2}}\,\mathrm{d}q=\sqrt{1+m^{2}}\cdot t$$

מכאן יש למצוא את $t\left(s\right)$:

$$t\left(s\right)=t=\frac{s}{\sqrt{1+m^{2}}}$$

ניקח את $t\left(s\right)$ שמצאנו:

$$\gamma\left(s\right)=\left(\frac{s}{\sqrt{1+m^{2}}},\frac{ms}{\sqrt{1+m^{2}}+n}\right)$$

בדיקה:

$$\gamma'\left(s\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^{2}}},\frac{m}{\sqrt{1+m^{2}}}\right)\implies\left\Vert \gamma'\left(s\right)\right\Vert =1$$

ב. פרמטריזציה למשל היא

$$\gamma\left(t\right)=\left(t,t^{2}\right)$$

$$\gamma'\left(t\right)=\left(1,2t\right)$$

$$\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert =\sqrt{1+4t^{2}}\neq1$$

$$s\left(t\right)=\int_{0}^{t}\left\Vert \gamma'\left(q\right)\right\Vert \,\mathrm{d}q=\int_{0}^{t}\sqrt{1+4q^{2}}\,\mathrm{d}q$$

$$s\left(t\right)=t\sqrt{\frac{1}{4}+t^{2}}+\frac{1}{4}\cdot\ln\left(t+\sqrt{\frac{1}{4}+t^{2}}\right)$$

$$s\left(t\right)\xrightarrow{??}t\left(s\right)$$