R חוג

$S\subseteq R$ קבוצה במרכז של החוג, איבריה רגולריים, סגורה לכפל, $1\in S$.

$$R\subseteq S^{-1}R=\left\{\frac{a}{s}\middle|\begin{array}{c}a\in R\\ s\in S\end{array}\right\}$$

לדוגמה, $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]=\langle 2\rangle^{-1}\mathbb{Z}$

אם $A\lhd S^{-1}R$, אז $A\cap R\lhd R$, שכן תמיד ניתן לחתוך אידאל באמצעות תת חוג ולקבל אידאל של התת חוג. לכן ניתן להגדיר הומומורפיזם $\Psi: A\mapsto A\cap R$ חח"ע. ההומומורפיזם בכיוון ההפוך Φ הוא על.

אם לוקחים אידאל אמיתי של $S^{-1}R$ מקבלים אידיאלים של R הזרים לS. זהו צימצום של ההעתקות, והן נשארות חח"ע ועל בהתאמה.

כל אידאל הוא מהצורה $S^{-1}I$.

תזכורת

$P\lhd R$ ראשוני אם $II'\subseteq P \Leftarrow I\subseteq P$ או $I'\subseteq P$.

טענה 1

יהי $P\lhd R$ ראשוני וזר לS. אז $R\cap S^{-1}P=P$

הוכחה

ברור ש$P\subseteq R\cap S^{-1}P$. נוכיח את ההכלה בכיוון ההפוך.

נניח ש$x\in R\cap S^{-1}P$. אז קיימים $\begin{array}{c}a\in P\\ s\in S\end{array}$ כך ש$x=\frac{a}{s}$ וגם קיים $x_0\in R$ כך ש$x=\frac{x_0}{1}$.

$$x=\frac{x_0}{1}=\frac{a}{s}\Leftrightarrow a=sx_0$$

לכן

$$Rs\cdot Rx_0R=sRx_0R=Rsx_0R=RaR\subseteq P$$

P ראשוני ולכן מכיל אחד האידאלים, אבל $s\notin P$ ולכן $x_0\in Rx_0R\subseteq P \Leftarrow x=\frac{x_0}{1}\in P$.

טענה 2

אם $P\lhd R$ ראשוני וזר לS, אז $S^{-1}P$ ראשוני.

הוכחה

כל אידאל של $S^{-1}R$ הוא מהצורה $S^{-1}I$ כאשר $I \lhd R$. נניח ש$\subseteq$ $I_1I_2 \subseteq S^{-1}I_1 \cdot S^{-1}I_2$ $S^{-1}P$. הרי גם $I_1I_2 \subseteq R$ ולכן

$$I_1I_2 \subseteq S^{-1}P \cap R = P$$

$$\Leftarrow \quad \begin{array}{c} I_1 \subseteq P \\ \Downarrow \\ S^{-1}I_1 \subseteq S^{-1}P \end{array} \quad \text{או} \quad \begin{array}{c} I_2 \subseteq P \\ \Downarrow \\ S^{-1}I_2 \subseteq S^{-1}P \end{array}$$

טענה 3

נניח ש$A \lhd S^{-1}R$ אידאל ראשוני אמיתי. אז $A \cap R$ ראשוני.

הוכחה

נניח ש$I_1, I_2 \lhd R$ כך ש$I_1I_2 \subseteq A \cap R$. אז

$$S^{-1}I_1 \cdot S^{-1}I_2 = S^{-1}I_1I_2 \subseteq S^{-1}\left(A \cap R\right) = A$$

מכיוון שA ראשוני, קיים k כך ש$s^{-1}I_k \subseteq A$. לכן $I_k \subseteq S^{-1}I_k \cap R \subseteq A \cap R$

משפט

Φ, Ψ הן התאמה חח"ע ועל בין אידיאלים ראשוניים של $S^{-1}R$ לבין אידיאלים ראשוניים של R שזרים לS.

הגדרה - מיפום

כעת, נניח שR תחום שלמות(=חוג קומוטטיבי ללא מחלקי אפס).
יהי P אידאל ראשוני של R. נסתכל על המשלים שלו - $S = R - P$.

S הוא:
- במרכז
- מכיל איברים רגולריים
- כולל את 1

S לגור לכפל כי P ראשוני.
קיבלנו

$$R_P = S^{-1}R = \left(R - P\right)^{-1}R$$

R_P נקרא <u>המיפום</u>(localization) של R בP.

דוגמה

$P = 5\mathbb{Z}$,$R = \mathbb{Z}$

$$R_p = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \begin{array}{c} a \in \mathbb{Z} \\ b \notin P \end{array} \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| 5 \nmid b \right\} \subseteq \mathbb{Q}$$

$$= \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots\right] = \{x | 5 \nmid b \text{ עם } x = \frac{a}{b} \text{ אפשר להציג}\}$$

הוכחנו שהמיפום R_P הוא חוג המכיל את R ושבו כל איבר שאינו בP הפיך.

טריוויאלי: R_P קומוטטיבי.

לפי המשפט שהוכחנו,

$$\begin{array}{rcl} A \cap R & \leftarrow & A \lhd R_p \\ I \lhd R & \mapsto & (R-P)^{-1} I \end{array}$$

הן התאמות חח"ע ועל בין אידאלים ראשוניים של R_P לאידאלים ראשוניים של R שמוכלים בP.

מכיוון שP מכיל כל אידאל המוכל בR
$(R-P)^{-1} P = P_P$ מכיל כל אידאל המוכל בR_P
$\Leftarrow$ P_P מכיל כל אידאל המוכל בR_P
$\Leftarrow$ P_P הוא האידאל המקסימלי היחיד

מסקנה

R_P חוג מקומי.

בדוגמה, $[b \neq s$ ראשוני$|\frac{1}{b}]\mathbb{Z} \subseteq [\cdots]\mathbb{Z} \cdot 5$ האידאל המקסימלי היחיד של $\mathbb{Z}_{5\mathbb{Z}}$.4

נניח שR תחום שלמות.
נבחר $P = 0$. זהו אידאל ראשוני.
$S = R - 0 = \{a \neq 0\}$. המיפום נותן

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \begin{array}{c} a \in R \\ 0 \neq b \in R \end{array} \right\}$$

יש התאמה חח"ע ועל בין אידאלים ראשוניים של $S^{-1}R$ לבין 0 $\Leftarrow$ 0 הוא אידאל מקסימלי של $S^{-1}R$ ולכן $S^{-1}R$ הוא שדה(קל גם לראות זאת ישירות מההגדרה).

מסקנה

כל תחום שלמות R מוכל בשדה:

$$R \subseteq (R-0)^{-1} \cdot R$$

לדוגמה: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

מסקנה

תחומי שלמות הם תת־חוגים של שדות
[תחומים $\subsetneq$ תת־חוגים של חוגי חילוק]

הגדרה

לשדה $R\,(R-0)^{-1}$ קוראים "שדה השברים של R". מסמנים $q(R)$

דוגמאות

- $$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$
- $$q\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{Q}$$
- אם $q(R) = \mathbb{F}$, $\mathbb{F} \supseteq R' \supseteq R$ אז $q(R') = \mathbb{F}$.
- $$q\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right) = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2}\middle|a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$
- $\mathbb{F}$ שדה.
  - $$q(\mathbb{F}[x]) = \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\middle|g \neq 0\right\} = \mathbb{F}(x)$$
  - $$\mathbb{F}[x, y] \subseteq (\mathbb{F}(x))[y] \subseteq \underbrace{\mathbb{F}(x)(y)}_{=\left\{\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right\}} = \mathbb{F}(x, y)$$
  - $$q(\mathbb{Z}[x]) = \mathbb{Q}(x)$$

ובאופן כללי

$$q\left(R\left[x\right]\right)=q\left(R\right)\left(x\right)$$

$$q\left(\mathbb{F}\left[\left[x\right]\right]\right)=\mathbb{F}\left(\left(x\right)\right)$$

בעיה

לתאר את

$$\begin{array}{ccc} q\left(\mathbb{Z}\left[\left[x\right]\right]\right) & \subset & \mathbb{Q}\left(\left(x\right)\right)\\ \| \\ \left\{ \frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}}{\sum_{n=0}^{\infty}b_{n}x^{n}}\middle|a_{n},b_{n}\in\mathbb{Z}\right\} \end{array}$$

קצת תיאוריה

R תחום שלמות. אם $S\subseteq S_{1}\subset R$ סגורות לכפל,

$$R\hookrightarrow S^{-1}R\hookrightarrow q\left(R\right)=\left(R-0\right)^{-1}R$$

$$a\mapsto\frac{a}{1}$$

$$\frac{a}{s}\mapsto\frac{a}{s}$$

$$\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}\left(\frac{1}{2}\right)\subseteq\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]\subseteq\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{11},\ldots\right]\subseteq\mathbb{Q}$$

בפרט אם $P\subseteq P_{1}$ שניהם ראשוניים,

$$R\hookrightarrow R_{P}\hookrightarrow R_{P_{1}}\hookrightarrow q\left(R\right)$$

בפרט כל החוגים המקומיים שבנינו מקיימים

$$R\subseteq R_{p}\subseteq\mathbb{F}=q\left(R\right)$$

משפט

יהי R תחום שלמות, $\mathbb{F} = q\left(R\right)$

$$\bigcap_{\substack{R \subseteq L \subseteq \mathbb{F} \\ L \text{ is local}}} L = R$$

הגדרה

השיכון $R \to S^{-1}R$ הוא על $\Leftrightarrow$ איברי S הפיכים כבר בR.

בפרט, אם $\mathbb{F}$ שדה, $q\left(\mathbb{F}\right) = \mathbb{F}$

מסקנה

אם $R \subseteq R_1 \subseteq \mathbb{F}$, $\mathbb{F} = q\left(R\right)$, אז

$$\mathbb{F} = q\left(R\right) \subseteq q\left(R_1\right) \subseteq q\left(\mathbb{F}\right) = \mathbb{F}$$

$$\Downarrow$$

$$q\left(R_1\right) = \mathbb{F}$$