משפט

יהיו $M \subset \mathbb{R}^n$, $a \in M$. נניח $n \leftarrow k \leftarrow 1$, $p \in \mathbb{N}$. התכונות הבאות שקולות:

1. קיימת סביבה U_a וקיימת $g : U_a \to, \mathbb{R}^{n-k}$ כזאת ש$g \in C^p(U_a)$, $\text{rank}g' = n-k$ לכל $x \in U_a$ ו$M \cap U_a = \{x \in U_a | g(x) = 0\}$
2. קיימת סביבה של a בM, $M \cap V_a$, כזאת שהיא הגרף של הפונקציה $f : W \to \mathbb{R}^{n-k}$, $W \subset \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה ו$f \in C^p(W)$, $M \cap V_a = \{(w, f(w)) | w \in W\}$
3. קיימת סביבה של a בM, $M \cap G_a$, קבוצה פתוחה ב$\Omega \subset \mathbb{R}^k$ והומיאומוריזם $F(\Omega) = M \cap G_a$ כזה ש$F \in C^p(\Omega)$, $\text{rank}F'(t) = k$ לכל $t \in O$.

הוכחה

$\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix} \Rightarrow (2)$ קל

$(2) \Rightarrow (1)$ משפט הפונקציה הסתומה

$(2) \Rightarrow (3)$ תהי $a \in M$. קיימת $t_0 \in \Omega : F(t_0) = a$.

$$F = (F_1, \dots F_n) \qquad a = (a_1, \dots a_n)$$

$$\Phi(t_1, \dots t_k) = (F_1(t_1 \dots t_k), \dots F_k(t_1, \dots t_k)) : \Omega \to \mathbb{R}^k$$

$\text{rank}F'(t_0) = k \Leftarrow J_\Phi(t_0) \neq 0$. לפי משפט הפונקציה ההפוכה, קיימת $U_{t_0} \subset \Omega$ ו$H(a_1, \dots a_k)$ כך ש$\Phi : U_{t_0} \to H(a_1, \dots a_k)$ דיפאומורפיזם.
נגדיר:

$$F\left(\Phi^{-1}(w)\right), \qquad w \in H(a_1, \dots a_k)$$

$$F = (\Phi, F_{k+1}, F_{k+2}, \dots F_n)$$

$$F\left(\Phi^{-1}(w)\right) = \left(w, \underbrace{F_{k+1}\left(\Phi^{-1}(w)\right), \dots F_n\left(\Phi^{-1}(w)\right)}_{f(w)}\right) =$$

$$= (w, f(w)) \qquad w \in H(a_1, \dots a_k) \equiv W$$

$$F\left(\Phi^{-1}\left(\underbrace{H(a_1, \dots a_k)}_{W \subset \mathbb{R}^k}\right)\right) = \boxed{F(U_{t_0})} = M \cap V_a$$

הערה

בסביבת הנקודה a ב-M,

$$F^{-1}\left(x_1,\dots x_n\right)=\Phi^{-1}\left(x_1,\dots x_k\right)\in C^p$$

תזכורת

$$\left(F_\alpha,\Omega_\alpha\right):M=\bigcup_\alpha F_\alpha\left(\Omega_\alpha\right)$$

F_α הן מפות של המשטח. M הוא אטלס

העתקות מעבר

יהיו שתי מפות

$$\left(F_i,\Omega_i\right),\left(F_j,\Omega_j\right)$$

כך שהחיתוך לא ריק

$$E=F_i\left(\Omega_i\right)\cap F_j\left(\Omega_j\right)\neq\emptyset$$

כלומר הן מתארות חלק משותף E במשטח.
נגדיר העתקות מעבר:

$$T_{ji}=F_j^{-1}\circ F_i:F_i^{-1}\left(E\right)\to F_j^{-1}\left(E\right)$$

$$T_{ij}=T_{ji}^{-1}=F_i^{-1}\circ F_j$$

משפט

יהיו $\left(F_i,\Omega_i\right)$ ו-$\left(F_j,\Omega_j\right)$ שתי מפות ונניח ש-$E=F_i\left(\Omega_i\right)\cap F_j\left(\Omega_j\right)\neq\emptyset$. אזי ההעתקה $T_{ji}=F_j^{-1}\circ F_i$ היא C^p דיפאומורפיזם.
[T_{ji}, $\det T'_{ji}\neq 0$ שכן T_{ji} דיפאומורפיזם]

הוכחה

תהי $t\in F_i^{-1}\left(E\right)$, $F_i\left(t\right)=x$, $F_j\left(u\right)=x$.
קיימת סביבה $M\cap V_x$: $F_j^{-1}\in C^p\left(M\cap V_x\right)$. לפי רציפות, קיימת סביבה B_t:
$F_i\left(B_t\right)\subset M\cap V_x$

מסקנה

במקום סביבה Ω, תמיד ניתן לבחור כדור יחידה, ואז $M=\bigcup\limits_{\alpha}F_{\alpha}\left(B\left(0,1\right)\right)$

מרחב משיק

$$\Gamma:\gamma\left(t\right)=\left(\gamma_{1}\left(t\right),\ldots\gamma_{n}\left(t\right)\right)\qquad t\in I\subset R$$

$\mathrm{rank}\gamma'\left(t\right)=1$: לכל $t\in I$, $\gamma'\left(t\right)\neq0$

הגדרה

וקטור $\gamma'\left(t\right)=\left(\gamma_{1}'\left(t\right),\ldots\gamma_{n}'\left(t\right)\right)$ נקרא וקטור משיק לעקום Γ בנקודה $\gamma\left(t\right)$.

הגדרה

יהיו $M\subset\mathbb{R}^{n}$ משטח k-ממדי מC^{1} ויהי $x\in M$. וקטור $v\in\mathbb{R}^{n}$ נקרא וקטור משיק לM בנקודה x אם קיים עקום $\gamma:I\to\mathbb{R}^{n}$ וקיימת $t_{0}\in I$ כך ש$\gamma\left(t\right)\in M$ לכל $t\in I$, $\gamma\left(t_{0}\right)=x$ ו$\gamma'\left(t_{0}\right)=v$.

הגדרה

אוסף של כל וקטורי משיק לM בנקודה x נקרא מרחב משיק לM בנקודה x ומסמנים אותו על ידי $T_{x}\left(M\right)$.

נגדיר קבוצות:

$$\begin{aligned}g: &\qquad M\cap U_{x_{0}}=\left\{ g\left(x\right)=0\right\} ,\mathrm{rank}g'=n-k\\ \left(w_{0},f\left(w_{0}\right)\right)=x_{0} &\qquad M\cap V_{x_{0}}=\left\{ \left(w,f\left(w\right)\right)\right\} \\ F\left(t_{0}\right)=x_{0} &\qquad M\cap G_{x_{0}}=F\left(\Omega\right)\end{aligned}$$

$$\mathrm{Im}\left(F'\left(t_{0}\right)\right)=\left\{ F'\left(t_{0}\right)y\middle|y\in\mathbb{R}^{k}\right\} \qquad\ker\left(g'\left(x_{0}\right)\right)=\left\{ h\in\mathbb{R}^{n}|g'\left(x_{0}\right)h=0\right\}$$

$$\mathrm{graph}\left(f'\left(x_{0}\right)\right)=\left\{ \xi,f'\left(w_{0}\right)\xi\right\}$$

$$F'\left(t_{0}\right)e_{1},\ldots F'\left(t_{0}\right)e_{k}$$

$$\mathrm{Im}F'\left(t_{0}\right)=\mathrm{span}\left(F'\left(t_{0}\right)e_{1},\ldots F'\left(t_{0}\right)e_{k}\right)$$

משפט

מתקיים:

$$Tx_0\left(M\right)=\text{graph}\left(f'\left(w_0\right)\right)=\text{Im}F'\left(t_0\right)=\ker\left(g'\left(x_0\right)\right)$$

$$F_j\left(u\right)=F_i\left(T_{ij}\left(u\right)\right)$$

$$F_j'\left(u_0\right)=F_i'\left(T_{ij}\left(u_0\right)\right)T_{ij}'\left(u_0\right)=F_i'\left(t_0\right)T_{ij}'\left(u_0\right)$$

הוכחה

צריך להוכיח:

$$T_{x_0}\left(M\right)\subset\ker\left(g'\left(x_0\right)\right)$$

$$\text{graph}f'\left(w_0\right)\subset Tx_0\left(M\right)$$

$$\text{Im}F'\left(t_0\right)\subset T_{x_0}\left(M\right)$$

יהי $h\in T_{x_0}\left(M\right)$. קיים עקום $\gamma:I\to\mathbb{R}^n$, $t_0\in I$:

$$\gamma\left(t_0\right)=x_0\qquad\gamma'\left(t_0\right)=h$$

ברציפות, קיים $\delta>0$ כזה שלכל $t\in\left(t_0-\delta,t_0+\delta\right)$, $\gamma\left(t\right)$ מוכל בסביבה של x_0 ב-M המתאורת על ידי $g\left(x\right)=0$ ⇐ $g\left(\gamma\left(t\right)\right)=0$ לכל $t\in\left(t_0-\delta,t_0+\delta\right)$ ⇐ $g'\left(\gamma\left(t_0\right)\right)\gamma'\left(t_0\right)=0$ ⇐ $g'\left(x_0\right)h=0$.

$\xi\in\mathbb{R}^n$. קיים $\epsilon>0$ כזה ש-$w_0+t\xi\in W$ לכל $t\in\left(-\epsilon,\epsilon\right)$. נגדיר

$$t\in\left(-\epsilon,\epsilon\right)\qquad\gamma\left(t\right)=\left(w_0+t\xi,f\left(w_0+t\xi\right)\right)$$

$$\gamma'\left(0\right)=\boxed{\left(\xi,f'\left(w_0\right)\xi\right)}$$

$$\gamma\left(0\right)=\left(w_0,f\left(w_0\right)\right)$$

$M\subset\mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה.

$$\boxed{T_x\left(\mathbb{R}^k\right)=\mathbb{R}^k}\qquad\boxed{T_x\left(M\right)=\mathbb{R}^k}$$

ב-$\mathbb{R}^3$,

$$r\left(u,v\right)=\left(\varphi\left(u,v\right),\psi\left(u,v\right),\chi\left(u,v\right),\left(u,v\right)\right)\in D$$

$$r'_u\left(u,v\right)=\left(\varphi'_u\left(u,v\right),\psi'_u\left(u,v\right),\chi'_u\left(u,v\right)\right)$$

$$r'_v\left(u,v\right)=\left(\varphi'_v\left(u,v\right),\psi'_v\left(u,v\right),\chi'_v\left(u,v\right)\right)$$

$$x_0=r\left(u_0,v_0\right)$$

$$T_{x_0}\left(M\right)=\operatorname{span}\left(r'_u\left(u_0,v_0\right),r'_v\left(u_0,v_0\right)\right)$$