פרוביניוס מכה שנית

משוואת בסל "המותאמת" (modified Bessel equation)

משוואת בסל המותאמת מסדר ν היא:

$$x^2y'' + xy' - \left(x^2+\nu^2\right)y = 0$$

(ν קבוע). ננסה לפתור:

קודם כל נביא לצורה נורמלית:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

$x=0$ נקודה סינגולרית. נתבונן בגבולות:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\cdot\left[-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)\right] = -\nu^2$$

הגבולות קיימים ולכן 0 נקודה <u>רגולרית סינגולרית</u>.

נבדוק מה המצב ב∞. נחליף משתנה:

$$z := \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d}{dz} = -\frac{1}{x^2}\frac{d}{dz} = -z^2\frac{d}{dz}$$

$$\left(x=\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 = -z^2\frac{d}{dz}\left(-z^2\frac{d}{dz}\right) = -z^2\left(2z\frac{d}{dz} - z^2\frac{d^2}{dz^2}\right) = z^4\frac{d^2}{dz^2} + 2z^2\frac{d}{dz}$$

המד"ר היא:

$$\left(\frac{1}{z}\right)^2\left[z^4\frac{d^2}{dz^2} + 2z^3\frac{d}{dz}\right]y + \frac{1}{z}\left(-z^2\frac{d}{dz}\right)y - \left(\frac{1}{z^2}+\nu^2\right)y = 0$$

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\cdot\frac{dy}{dz} - \left(\frac{1}{z^2}+\nu^2\right)y = 0$$

נשים לב ש$z\to 0 \Leftrightarrow x\to\infty$

נבדוק התנהגות כאשר $z \to 0$ בצורה הנורמלית:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} - \left(\frac{1}{z^4} + \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0$$

$$\lim_{z\to 0} z \cdot \frac{1}{z} = 1 \quad \surd$$

$$\lim_{z\to 0} z^2 \cdot \left[-\left(\frac{1}{z^4} + \frac{\nu^2}{z^2}\right)\right] = \mathrm{NaN}$$

$\Leftarrow\infty$ נקודה לא רגולרית סינגולרית.

נחפש פתרון בשיטת פרוביניוס סביב הנקודה הרגולרית סינגולרית ב 0

$$\Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}; a_0 \neq 0$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha-1)(n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha-1)(n+\alpha) a_n x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \nu^2 a_n x^{n+\alpha} = 0$$

החזקה המשותפת המינימלית לכל הטורים היא $\alpha + 2$, ולכן נסדר קצת:

$$\left(\begin{array}{c} (\alpha-1)\alpha a_0 x^{\alpha} + \alpha(\alpha+1) a_1 x^{\alpha+1} \\ + \\ \sum_{n=2}^{\infty} (n+\alpha-1)(n+\alpha) a_n x^{n+\alpha} \\ + \\ \alpha a_0 x^{\alpha} + (\alpha+1) a_1 x^{\alpha+1} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha} \\ - \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha+2} - \nu^2 a_0 x^{\alpha} - \nu^2 a_1 x^{\alpha+1} - \sum_{n=2}^{\infty} \nu^2 a_n x^{n+\alpha} \end{array}\right) = 0$$

$$\left(\begin{array}{c}\left[(\alpha-1)\,\alpha+\alpha-\nu^2\right]a_0x^{\alpha}\\+\\\left[\alpha\,(\alpha+1)+(\alpha+1)-\nu^2\right]a_1x^{\alpha+1}\\+\\\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+\alpha+2)\,a_{n+2}x^{n+\alpha+2}\\-\\\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha+2}\\-\\\sum\limits_{n=0}^{\infty}\nu^2a_{n+2}x^{n+\alpha+2}\end{array}\right)=0$$

$$\left(\begin{array}{c}\left(\alpha^2-\nu^2\right)a_0x^{\alpha}+\left(\alpha^2+2\alpha+1-\nu^2\right)a_1x^{\alpha+1}\\+\\\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+\alpha+1)\,(n+\alpha+2)+(n+\alpha+2)-\nu^2\right]a_{n+2}-a_n\right\}x^{n+\alpha+2}\end{array}\right)=0$$

- מקדם של x^2: לאחר חילוק ב$a_0 \neq 0$:

$$\alpha^2-\nu^2=0$$

$$\alpha_{1,2}=\pm\nu$$

- מקדם של $x^{\alpha+1}$

$$\left(\alpha^2-\nu^2+2\alpha+1\right)a_1=0$$

$$(2\alpha+1)\,a_1=0$$

אם $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ אזי $a_1=0$

שאר המקדמים:

$$(n+\alpha+2+\nu)\,(n+\alpha+2-\nu)\,a_{n+2}-a_n=0,\quad n=0,1,2,...$$

לאחר פישוט בMupad:

$$a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+\alpha+2+\nu)\,(n+\alpha+2-\nu)}$$

עבור $\alpha=\nu$:

$$a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+2)\,(n+2+2\nu)}$$

נציב nים:

$$
\begin{aligned}
n=0 \qquad & a_2=\frac{a_0}{2\left(2+2\nu\right)}=\frac{a_0}{2^2\left(1+\nu\right)}\\
n=1 \qquad & a_3=\frac{a_1}{???}=0\\
n=2 \qquad & a_4=\frac{a_2}{4\left(4+2\nu\right)}=\frac{a_2}{2^3\left(2+v\right)}=\frac{a_0}{2^4\cdot 2!\left(1+\nu\right)\left(2+\nu\right)}\\
n=3 \qquad & a_5=\frac{a_3}{???}=0\\
& \vdots\\
n=2p \qquad & a_{2p}=\frac{a_0}{2^{2p}\cdot p!\prod_{j=1}^{p}\left(\nu+j\right)}=\frac{a_0}{2^{2p}\cdot p!\frac{\Gamma\left(p+1+\nu\right)}{\Gamma\left(1+\nu\right)}}\\
& =\underbrace{2^{\nu}\cdot\Gamma\left(1+\nu\right)\cdot a_0}_{A_0}\cdot\frac{1}{2^{2p+\nu}\cdot p!\Gamma\left(1+p+\nu\right)}=A_0\frac{1}{2^{2p+\nu}\cdot p!\Gamma\left(1+p+\nu\right)}\\
n=2p+1 \qquad & a_{2p+1}=0
\end{aligned}
$$

קיבלנו פתרון:

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\nu}=\sum_{p=0}^{\infty}a_{2p}x^{2p+\nu}=A_0\cdot\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!\Gamma\left(p+\nu+1\right)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu}$$

אם ניקח את הקבוע החופשי A_0 להיות 1, נקבל את פונקציית בסל המותאמת(modified) מהסוג הראשון מסדר ν

$$I_{\nu}\left(x\right):=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!\Gamma\left(p+\nu+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu}$$

(נקראת גם פונקציית בסל ההיפרבולית)
ניתן לעשות חשבות דומה ולקבל שגם $I_{-\nu}\left(x\right)$ פתרון.

- אם ν אינו שלם $I_{\nu},I_{-\nu}$ שני פתרונות בת"ל של משוואת בסל המותאמת ולכן פתרונה הכללי:

$$y=C_1I_{\nu}\left(x\right)+C_2I_{-\nu}\left(x\right)$$

- אך אם ν שלםפ, $I_{-\nu}=I_\nu$(תרגיל) ולכן הם ת"ל וחסר פתרון שני. כדי לטפל בבעיה זו מגדירים את פונקציית בסל המותאמת מהסוג השני:

$$K_\nu(x):=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

אם $\nu=m$ שלם יש לפרש את ההגדרה כגבול כאשר $\nu\to m$.
I_ν, K_ν שני פתרונות בת"ל של משוואת בסל המותאמת מסדר ν, כך שפתרונה הכללי הוא:

$$y=C_1I_\nu(x)+C_2K_2(x)$$

תת תרגיל

פתור את המשוואה

$$x^2y''+xy'-\left(x^2-\nu^2\right)y=0$$

מצא את הפתרון הממשי הכללי

פתרון

זוהי משוואת בסל המותאמת מסדר $i\nu$ ולכן פתרונה הכללי הוא:

$$y=C_1I_{i\nu}(x)+C_2I_{-i\nu}(x)$$

אין חשש ש$i\nu$ שלם כי $\nu>0$, ולכן $I_{\pm i\nu}$ בת"ל.
נרצה פתרון ממשי:($\overline{y}=y$)

$$\overline{y}=\overline{C_1I_{i\nu}(x)+C_2I_{-i\nu}(x)}=\overline{C_1}\cdot\overline{I_{i\nu}(x)}+\overline{C_2}\cdot\overline{I_{-i\nu}(x)}$$

$$=\overline{C_1}I_{-i\nu}(x)+\overline{C_2}I_{i\nu}(x)\overset{!}{=}C_2I_{-i\nu}(x)+C_1I_{i\nu}(x)$$

צריכים(ע"י השוואה מקדמים) C_1, C_2 צמודים זה לזה. ניקח $C_1=A+Bi \Leftarrow C_2=A-Bi$

$$\Rightarrow y=(A+Bi)\,I_{i\nu}(x)+(A-Bi)\,I_{-i\nu}(x)=$$

$$=A\left(I_{i\nu}(x)+I_{-i\nu}(x)\right)+Bi\left(I_{i\nu}(x)-I_{-i\nu}(x)\right)=$$

$$=A\cdot 2\mathrm{Re}\left(I_{i\nu}(x)\right)+Bi\left(2i\mathrm{Im}\left(I_{i\nu}(x)\right)\right)=$$

$$=\boxed{D_1\mathrm{Re}\left(I_{i\nu}(x)\right)+D_2\mathrm{Im}\left(I_{i\nu}(x)\right)}$$

תרגיל

למשוואה הבאה העזר בשיטת פרוביניוס למצוא פתרון אחד ותאר את הצורה של הפתרון הכללי:

$$x^2y'' + 3xy' + (1-x)\,y = 0$$

פתרון

$x=0$ נקודה רגולרית סינגולרית(בדקו!)

נחפש פתרון בצורה $a_0 \neq 0 \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)\, a_n x^{n+\alpha-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha-1)\,(n+\alpha)\, x^{n+\alpha-2}$$

נציב במד"ר

$$...$$

$$\left(\alpha^2+2\alpha+1\right) a_0 x^{\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\left[(n+\alpha)\,(n+\alpha+1) + 3\,(n+\alpha+1) + 1\right] a_{n+1} - a_n\right\} x^{n+\alpha+1} = 0$$

שאר המקדמים:

$$\left[(n+\alpha)\,(n+\alpha+1) + 3\,(n+\alpha+1) + 1\right] a_{n+1} - a_n = 0$$

נציב $\alpha = -1$ ונקבל:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)^2} \quad n = 0,1,2,...$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{a_0}{1^2} \\
a_2 &= \frac{a_1}{2^2} = \frac{a_0}{1^2 \cdot 2^2} \\
a_3 &= \frac{a_2}{3^2} = \frac{a_0}{1^2 2^2 3^2} = \frac{a_0}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} \\
&\vdots \\
a_n &= \frac{a_0}{n!^2}
\end{aligned}$$

ניקח $a_0 = 1$ בה"כ כדי לקבל פתרון פרטי

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2} x^{n-1}}$$

לא חובה, אבל במקרה הזה אפשר למצוא פתרון ישיר:

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!^2} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2} \left(\frac{2\sqrt{x}}{2} \right)^{2n} = \frac{1}{x} I_0 \left(2\sqrt{x} \right)$$

השורשים של המשוואה זהים ולכן כפי שנלמד בהרצאה הפתרון השני מקבל צורה:

$$\boxed{y_2 (x) = y_1 (x) \cdot \log (x) + x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}$$