

אלגברה לינארית 2 (88113) – בחינת סיום (מועד ב') פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות, כל שאלה בעמוד נפרד. כל השאלות שוות משקל.
ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".
נא להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה!

1. יהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ אופרטור לינארי המייצג שיקוף ביחס לישר $y = x$:

$$T(x, y) = (y, x) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

א. רשמו את המטריצה $[T]_E$ המייצגת את T ביחס לבסיס הסטנדרטי E של \mathbb{R}^2 .

ב. מצאו בסיס סדור B של \mathbb{R}^2 שעבורו $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ג. האם יש בסיס סדור C של \mathbb{R}^2 שעבורו $[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$? נמקו.

2.

א. הגדירו: ערך עצמי, בלוק זיורדן.

ב. תהי $A \in \mathbb{C}^{10 \times 10}$ בעלת ערך עצמי יחיד $\lambda \in \mathbb{C}$. נתון:

$$\text{rank}(A - \lambda I) = 4, \quad \text{rank}(A - \lambda I)^2 = 3$$

מצאו את גודלי בלוקי זיורדן של A . בדקו את תשובתכם.

ג. עבור המטריצה הנ"ל, חשבו את $\text{rank}(A - \lambda I)^k$ לכל $k \geq 3$.

3.

א. הגדירו: קבוצה אורתונורמלית, אופרטור אוניטרי.

ב. יהיו: V מרחב מכפלה פנימית מממד סופי, $v, w \in V$ כך ש- $\|v\| = \|w\|$. הוכיחו

שקיים אופרטור אוניטרי $T: V \rightarrow V$ כך ש- $T(v) = w$.

ג. יהיו: $V = \mathbb{R}^2$ עם המכפלה הסקלרית הרגילה, $v = (1, 0)$, $w = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$. מצאו

אופרטור אוניטרי $T: V \rightarrow V$ כך ש- $T(v) = w$; הציגו אותו בבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^2 .

.4

- א. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות מתחלפות: $AB = BA$. הוכיחו: אם A מטריצה אלכסונית עם אברי אלכסון שונים זה מזה, אז B אלכסונית.
- ב. הוכיחו: אם $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצות מתחלפות כך שהפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים לינאריים שונים, אז B ניתנת לליכסון. ניתן להשתמש במסקנת הסעיף הקודם גם אם לא הוכחתם אותה.
- ג. תנו דוגמה של $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מתחלפות כך שהפולינום המינימלי של A מתפרק לגורמים לינאריים שונים אבל B לא ניתנת לליכסון.

.5

- א. הגדירו: מכפלה פנימית (מעל \mathbb{R} ומעל \mathbb{C}).
- ב. עבור אילו ערכי $a, b \in \mathbb{R}$ מהווה הפונקציה הבאה מכפלה פנימית ב- \mathbb{R}^2 ?
- $$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle := x_1 x_2 + 5x_1 y_2 + ay_1 x_2 + by_1 y_2$$
- ג. בחרו ערכים מותרים (לפי הסעיף הקודם) עבור $a, b \in \mathbb{R}$, ומצאו בסיס אורתונורמלי של \mathbb{R}^2 ביחס למכפלה הפנימית הנ"ל.