שיעורי בית 7

1. יהא n שלם ונסתכל על החבורה ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$ (עם הפעולה $[a]+[b]=[a+b]$. עם הסימון $[x]=x+n\mathbb{Z}$).

   (א) הוכיחו כי גם הפעולה $[a]\cdot[b]=[ab]$ מוגדרת. כלומר, אם $[a]=[a']$ וגם $[b]=[b']$ אזי $[ab]=[a'b']$.

   (ב) יהא p ראשוני. הוכיחו כי הקבוצה $M=\{[1],[2],\ldots,[p-1]\}$ היא מונואיד ביחס לפעולה $[a]\cdot[b]=[ab]$ (האמת שזאת חבורה).

2. תהא G חבורה חילופית. נגדיר $D=\{(g,g)\,:\,g\in G\}\subseteq G\times G$. הוכיחו כי זהוי תת חבורה נומאלית של $G\times G$ והראו כי

$$ {}^{G\times G}/_{D}\cong G $$

3. תהא G_1,G_2 שתי חבורות עם סדרים זרים (כלומר $\gcd(|G_1|,|G_2|)=1$). הוכיחו כי קיים הומו' אחד $\phi:G_1\to G_2$[רמז: חישבו על התמונה $\phi(G_1)$]

4. נגדיר $G=\{z\in\mathbb{C}:\,|z|=1\}$ מעגל היחידה עם פעולת כפל . הוכיחו כי

   (א) $G\cong\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ [הדרכה: השתמשו בפונקציה $e^{2\pi xi}$]

   (ב) נגדיר $H\leq G$ להיות כל שורשי היחידה מסדר כלשהו. כלומר

$$ H=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n $$

   כאשר $U_n=\{z\in G\,:\,z^n=1\}$ הם שורשי היחידה מסדר n.
   בעזרת סעיף קודם, הראו כי H איזומורפית ל $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

5. יהא $n\in\mathbb{Z}$ נסמן $H=\langle(n,n,n,n)\rangle\leq\mathbb{Z}^4$. הוכיחו כי $\left[{}^{\mathbb{Z}^4}/_{H}\right]\cong\left[\mathbb{Z}^3\times{}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\right]$