תרגיל 6 אליזה למורים

4 בינואר 2017

שאלה 1

האם הטור הבא מתכנס: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n-1}}$?

הדרכה:

נתבונן בסדרת הסכומים הלקיים של הטור:

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{3^n}{2^{n-1}}=\sum 2\cdot\frac{3^n}{2^n}=\sum 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n=2\cdot\left(\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)=2\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}}\right)$$

למה שווה גבול של הסדרה הזו? ומכיוון שסכום של טור אינסופי הוא גבול של סדרת הסכומים החלקיים שלו אזי מה אפשר להגיד על הטור שלנו?

פתרון:

מהביטוי שקיבלנו נקבל שהגבול הוא $\frac{2}{1-\frac{3}{2}}=-4$

שאלה 2

בדוק האם הטורים הבאים מתכנסים:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^3+5n+2}$

פתרון:

יש כמה דרכים לפתור את השאלה: דרך ראשונה אפשר להשתמש במבחן ההשוואה הראשון, דרך שנייה היא חהשתמש במבחן ההשוואה השני:

נשווה עם $\sum\frac{1}{n^3}$ אשר ידוע כטור מתכנס, ולכן

$lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n^2+5n+5}}{\frac{1}{n^3}}=lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3n^2+5n+5}=\frac{1}{3}$, ולכן הטורים הם חברים ולכן מתכנסים ביחד.

2) $\sum\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)\left(\sqrt[3]{n}+2\sqrt[5]{n+2}-1\right)}$

פתרון:

כל ביטוי מתנהג כמו $\frac{1}{n}$, ולכן אפשר להשוות עם הטור ההרמוני שידוע כטור מתכנס:

$lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)\left(\sqrt[3]{n}+2\sqrt[5]{n+2}-1\right)}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$ ולכן הטורים הם חברים ולכן מתבדרים ביחד.

שאלה 3

מצא את גבולות הבאים:

1) $lim\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$

משפט שימושי: נניח כי $lima_n=1$**, אזי** $lim\,(a_n)^{b_n}=e^{lim(a_n-1)b_n}$.

פתרון:

לפי המשפט השימושי מקבלים:

$$lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)=e^{lim\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}-1\right)\cdot n}=e^{lim\left(\frac{n^2+1-\left(n^2-2\right)}{n^2-2}\right)}=e^{lim\frac{3n}{n^2-2}}=e^0=1$$

2) $lim\left(\frac{n+4}{n+7}\right)^{n+1}$

פתרון:

$$lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+7}\right)^{n+1}=e^{lim\left(\frac{n+4}{n+7}-1\right)(n+1)}=e^{-3}$$

3) $lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^2+4}$

פתרון:

באותו אופן בדיוק מקבלים שהגבול כאן הוא 1

4) $lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^3+n^2}}{\sqrt[3]{n^6+2}+\sqrt[3]{n^3+4}}$

תזכורת: $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^3\right)$

5) $lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3-1}-\sqrt[3]{n^3+1}}$

פתרון:

$$lim\frac{\sqrt{3n^3+n^2}}{\sqrt[3]{n^6+2}+\sqrt[3]{n^3+4}}=lim\frac{n^{1.5}\sqrt{3+\frac{1}{n}}}{n^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^6}}\right)+n\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^3}}}=0$$

6) $lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^2+2^n+3^n+\cdots+666^n}$

רמז: שאלה דומה מאוד ראינו בכיתה.

פתרון:

נשתמש במשפט הסנדוויץ:

$666^n\leq 1^n+2^n+\cdots+666^n\leq 666\cdot 666^n$ נוציא שורש n־י משלושת הביטויים ונקבל:

$666\leq\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+666^n}\leq\sqrt[n]{666}\cdot 666$.

שאלה 4

ענה על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א) הוכח או הפרך: $lim\,(b_n)=0$ אזי $lim\frac{b_{n+1}}{b_n}=0$.

פתרון:

הפרכה: נבחר סדרה $\frac{1}{2^n}$ אזי $lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{2}\nrightarrow 0$

ב) תהי a_n סדרה ממשית מתכנסת לגבול ממשי L ותהי b_n סדרה חסומה שלא מתכנסת

אזי $a_n\cdot b_n$ מתכנסת אם ורק אם $L=0$.

פתרון:

הוכחה, הוכיח את שני הכיוונים:

כיוון $\Rightarrow$: אם $L=0$ אזי ברור ש-$a_n\cdot b_n$ מתכנסת, כי חסומה כפול אפסה שואפת לאפס ובפרט מתכנסת.

כיוון $\Leftarrow$: נתון לנו ש-a_n שואפת ל-0 ו-$a_n\cdot b_n$ מתכנסת, תריך להוכיח ש-$L=0$.

נניח בדרך השלילה ש-$L\neq 0$ ונניח ש-$lima_n\cdot b_n=K$ ואז לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל $b_n=\frac{a_n\cdot b_n}{a_n}\rightarrow\frac{K}{L}$ ולכן קיבלנו ש-b_n היא סדרה מתכנסת בסתירה לנתון.