תרגיל בית 13 – טופולוגיה 2013

<u>שאלה 1</u>

א. יהיו X,Y מ"ט, $f:X\to Y, g:Y\to X$ רציפות ומתקיים $f\circ g=id_Y$. הוכיחו כי f העתקת מנה.

ב. תהי $f:X\to Y$ העתקת מנה. הוכיחו כי f הומיאומורפיזם $\Leftrightarrow$ f חח"ע.

<u>שאלה 2</u>

א. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $x_1+y_1^2=x_2+y_2^2 \Leftrightarrow (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$. הוכיחו כי $\mathbb{R}^2/\sim$ הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל - $\hat{f}$ מ- $\mathbb{R}$ ל - $\mathbb{R}^2/\sim$.

ב. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2 \Leftrightarrow (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$. למה הומיאומורפי $\mathbb{R}^2/\sim$?

<u>שאלה 3</u>

יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל מיחס השקילות הבא:

$x\sim y \Leftrightarrow (x=y)\vee(x=-y)$. הראו ש- X הומיאומורפי ל- $[0,\infty)$.

<u>שאלה 4</u>

יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל ע"י זה שמזהים זו לזו את כל הנקודות $x\in\mathbb{R}$ כך ש $|x|\geq 1$. בלשון אחרת, X הוא מרחב המנה $\mathbb{R}/\sim$ כאשר $\sim$ הוא יחס שקילות המוגדר באופן הבא: $x\sim y$ אם ורק אם $x=y$ או $|x|\geq 1$ וגם $|y|\geq 1$. הראו ש X הומיאומורפי למעגל $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

שאלה 5

מוטיבציה: נראה דוגמה למרחב מטריזבילי שמרחב המנה שלו אינו מטריזבילי.

נתבונן במרחב שרפינסקי (Sierpinsky). זהו המרחב $X=\{0,1\}$ עם הטופולוגיה $\tau=\{\varnothing,X,\{0\}\}$.

א. הוכיחו שמרחב שרפינסקי אינו מטריזבילי.

ב. יהי $I=[0,1]$ ותהי $f:I\to\{0,1\}$ מוגדרת על-ידי $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 1 & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$.

נגדיר יחס שקילות על I באופן הבא: $a\sim b\Leftrightarrow f(a)=f(b)$ הוכיחו כי $I/\sim$ הומיאמורפי למרחב שרפינסקי.

ג. הסיקו שהעתקת מנה אינה שומרת על מטריזביליות.

שאלה 6

מצאו דוגמה להעתקת מנה שאינה פתוחה ואינה סגורה.

בהצלחה בבחינה!