מבוא לאנליזה 1 – השלמה לתרגול 2

- בסוף התרגול הוכחנו את הטענה הבאה:

טענה: אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L > 0$, אזי $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

- בסיום ההוכחה ציינו שהטענה נכונה גם כאשר $L = 0$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. נתון כי $0 < a_n \to 0$, לכן בפרט עבור $\varepsilon' := \varepsilon^2 > 0$ קיים $n_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים: $|a_n - 0| = a_n < \varepsilon' = \varepsilon^2$, כלומר $0 < a_n < \varepsilon^2$. ניקח $n_0 = n_1$. אז לכל $n \geq n_0$ מתקיים: $|\sqrt{a_n} - 0| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$, ולכן $\sqrt{a_n} \to 0$ כדרוש.

- לבסוף שאלנו האם ייתכן ש־$L < 0$?

נראה שהתשובה לכך שלילית בעזרת הטענה (הכללית יותר) הבאה:

טענה: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $a_n \geq m$ לכל $n \geq n_0$, וכן $a_n \to L \in \mathbb{R}$. אזי $L \geq m$.

הוכחה: נניח בשלילה כי $L < m$, ונסמן $\varepsilon := m - L > 0$. כיוון ש־$a_n \to L$, קיים $n_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon = m - L$. אבל אז בפרט $a_n - L < m - L$, כלומר $\boldsymbol{a_n < m}$ לכל $n \geq n_1$. זאת בסתירה לנתון $\boldsymbol{a_n \geq m}$ לכל $n \geq n_0$.

הערה: באופן דומה ניתן להוכיח שאם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת $a_n \leq M$ לכל $n \geq n_0$ ו־$a_n \to L \in \mathbb{R}$, אז $L \leq M$.