תרגיל בית 3 אינפי 3

1. יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $a_n \in X$ סדרה. הוכיחו כי $a_n \to a$ אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה P כך ש $a \in P$ קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n \in P$.

פתרון. יש כאן שני כיוונים שצריך להוכיח. כיוון ראשון ($\Rightarrow$): נניח שמתקיים התנאי עם קבוצות פתוחות.: צריך להוכיח ש $a_n \to a$. יהי $B(a,r)$ כדור שמרכזו ב a. אז לפי משפט, הכדור הזה הוא קבוצה פתוחה. לכן לפי הנתון, קיים קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n \in B(a,r)$ וזה מה שרצינו.

צד שני הוא קצת יותר קשה ($\Leftarrow$) נניח ש $a_n \to a$ ותהי P קבוצה פתוחה כך ש $a \in P$, אז לפי הגדרת קבוצה פתוחה קיים $r > 0$ כך ש

$$B(a,r) \subseteq P$$

לפי הגדרת גבול יש n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$a_n \in B(a,r)$$

ולכן

$$a_n \in P$$

כנדרש.

2. נסמן כרגיל ב d_1, d_2, d_∞ את מטריקות $1, 2, \infty$ על $\mathbb{R}^n$.

(א) הוכיחו כי אם P קבוצה פתוחה ביחס לאחת המטריקות האלה, היא פתוחה גם ביחס לאחרות.

(למשל: P : פתוחה ביחס ל d_1 אם לכל $x \in P$ קיים $r > 0$ כך ש

$$B(x,r) = \{y \mid d_1(y,x) < r\} \subseteq P$$

לכאורה ייתכן שביחס למטריקה אחרת זאת לא תהיה קבוצה פתוחה).

נשתמש בסימון כזה. נסמן ב B_1, B_2, B_∞ כדור שמוגדר לפי המטריקה d_1, d_2, d_∞ בהתאמה. נתקדם שלב שלב.

<u>שלב 1</u>: P פתוחה לפי d_2 אז P פתוחה לפי d_1. ניקח שני וקטורים

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad y = (y_1, \ldots, y_n)$$

ראשית נשים לב ש

$$\sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_n - y_n|^2} = d_2(x,y) \leq d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$$

(קל לראות זאת על ידי העלה בריבוע, חוץ מזה זה היה תרגיל בתרגיל בית הראשון)

וזה אומר ש

$$B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r)$$

מפני שאם

$$y \in B_1(x,r)$$

אז

$$d_1(x,y) < r$$

וזה בוודאי יגרור ש

$$d_2(x,y) < r$$

כלומר

$$y \in B_2(x,r)$$

אם P היא קבוצה פתוחה לפי d_2 אז אנחנו יכולים עכשיו להוכיח שהיא פתוחה גם לפי d_1. ניקח $a \in P$ אנחנו יודעים שיש r כך ש

$$B_2(a,r) \subseteq P$$

אבל לפי ההכלה $B_1(x,r) \subseteq B_2(x,r)$

$$B_1(a,r) \subseteq P$$

ולכן P פתוחה לפי B_1.

<u>שלב 2:</u> אם P פתוחה לפי d_∞ אז היא פתוחה לפי d_2. ראשית נשים לב ש

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\} \leq \sqrt{|x_1-y_1|^2+\ldots+|x_n-y_n|^2} = d_2(x,y)$$

ולכן משיקול דומה למה שעשינו קודם נקבל

$$B_2(x,r) \subseteq B_\infty(x,r)$$

ונוכל להוכיח שקבוצה פתוחה לפי d_∞ פתוחה גם לפי d_2.

<u>שלב 3:</u> קבוצה שפתוחה לפי d_1 פתוחה גם לפי d_∞. נשים לב ש

$$d_1(x,y) = |x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n| \leq n\max\{|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|\} = nd_\infty(x,y)$$

כלומר

$$\frac{d_1(x,y)}{n} \leq d_\infty(x,y)$$

מכאן אפשר להוכיח ש

$$B_\infty(x,\frac{r}{n}) \subseteq B_1(x,r)$$

מפני שאם $y \in B_\infty(x,\frac{r}{n})$ אז

$$d_\infty(x,y) < \frac{r}{n}$$

ולכן

$$\frac{d_1(x,y)}{n} < \frac{r}{n}$$

כלומר

$$d_1(x,y) < r$$

וזה גורר ש

$$y \in B_1(x,r)$$

כנדרש. עכשיו קל לסיים את הטיעון. נניח P פתוחה לפי d_1 . ניקח $a \in P$ אז קיים $r > 0$ כך ש

$$B_1(a,r) \subseteq P$$

לפי החישובים שעשינו קודם

$$B_\infty(a,\frac{r}{n}) \subseteq P$$

ולכן P פתוחה גם לפי d_∞.

(ב) הסיקו בעזרת שאלה 1 שסדרה מתכנסת במרחב המטרי $(\mathbb{R}^n,d_1)$ אם ורק אם היא מתכנסת ב $(\mathbb{R}^n,d_2)$ אם ורק אם היא מתכנסת ב $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$.

נניח ש $a_n \to a$ מתכנסת במרחב המטרי $(\mathbb{R}^n,d_1)$. נוכיח שהיא מתכנסת במרחב המטרי $(\mathbb{R}^n,d_2)$. נשתמש בקריטריון השקול של שאלה 1. תהי P פתוחה לפי d_2 כך ש $a \in P$. לפי סעיף א' P פתוחה גם לפי d_1 ולכן קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$a_n \in P$$

ולכן P מתכנסת במרחב המטרי $(\mathbb{R}^n,d_2)$. באותו פרינציפ בדיוק מוכיחים את שאר הטענות.

3. יהי $X = \mathbb{R}^n$ ונסמן ב d את המטריקה הדיסקרטית

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

אפיינו את הקבוצות הפתוחות ואת הסדרות המתכנסות ביחס למטריקה זו.

ניקח $x \in X$ כלשהוא. נשים לב שהאיבר y היחיד שמקיים

$$d(x,y) < \frac{1}{2}$$

הוא $y = x$ עצמו. כלומר

$$B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$$

אבל זה כדור פתוח ולכן קבוצה פתוחה. כלומר כל נקודה היא קבוצה פתוחה. מאחר שאיחוד של קבוצות פתוחות הוא גם קבוצה פתוחה נקבל ש<u>כל</u> קבוצה במרחב המטרי הזה היא פתוחה. עכשיו לגבי התכנסות. נניח ש

$$a_n \to a$$

מאחר והקבוצה $\{a\}$ היא פתוחה. זה אומר שקיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$a_n \in \{a\}$$

במילים אחרות: סדרה מתכנסת אם ורק אם היא קבועה החל משלב מסוים.

4. תהי $a_n \in \mathbb{R}^n$ סדרה של וקטורים. באופן טבעי נאמר כי הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

מתכנסת. הוכיחו כי אם טור המספרים

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||a_n||$$

מתכנס אזי גם טור הוקטורים

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

מתכנס.

נחקה את ההוכחה הסטנדרטית מאינפי 1. נוכיח ש S_n היא סדרת קושי. נסמן

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} ||a_k||$$

שזו כמובן סדרת קושי לפי הנתון. יהי $\epsilon > 0$ ידוע כי קיים n_0 כך שלכל $m > n > n_0$ מתקיים

$$|T_m - T_n| \leq \epsilon$$

כלומר

$$|||a_{n+1}|| + \ldots + ||a_m||| \leq \epsilon$$

כלומר

$$||a_{n+1}|| + \ldots + ||a_m|| \leq \epsilon$$

נבחר את אותו n_0. ואז עבור כל $m > n > n_0$ מתקיים

$$\begin{aligned}||S_m - S_n|| &= ||a_{n+1} + \ldots + a_m|| \\ &\leq ||a_{n+1}|| + \ldots + ||a_m|| \leq \epsilon\end{aligned}$$

ובזה סיימנו.