אינפי 4 – תרגיל 2

1. תהיינה f,g בעלות השתנות חסומה בקטע $[a,b]$.

א. הוכיחו כי המכפלה fg הינה בעלת השתנות חסומה בקטע .

פתרון :

נניח בחרנו חלוקה לקטע שלנו , ו- t_i, t_{i-1} נקודות ביניים עוקבות בה , אז קיים:

$f(t_i)g(t_i) - f(t_{i-1})g(t_{i-1}) = f(t_i)g(t_i) - f(t_i)g(t_{i-1}) + f(t_i)g(t_{i-1}) - f(t_{i-1})g(t_{i-1})$

ב. אם בנוסף קיים מספר חיובי $\varepsilon_0 > 0$ כך ש: $f(x) \geq \varepsilon_0$ לכל $x \in [a,b]$
הוכיחו כי $\frac{1}{f}$ בעלת השתנות חסומה בקטע.

2. הוכיחו או הפריכו : אם f בעלת השתנות חסומה בכל קטע סגור $[c,d]$ המוכל בקטע הפתוח (a,b) , אז f בעלת השתנות חסומה בקטע הסגור $[a,b]$.

פתרון : ***דוגמא נגדית*** - נסתכל על $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$. אז פונקציה זו עולה (ממש) בקטע הפתוח $(0,1)$ ולכן בכל תת קטע סגור המוכל בקטע זה.מכאן שפונקציה זו בעלת השתנות חסומה בכל תת קטע סגור כנ"ל! אך פונקציה זו איננה חסומה בקטע הסגור $[0,1]$, לכן איננה בעלת השתנות חסומה שם!.

3. *א. תנו דוגמא לשתי פונקציות בעלות השתנות חסומה כך שההרכבה של אחת על השניה מוגדרת – אך הפונקציה המורכבת ***איננה*** בעלת השתנות חסומה !

לדוגמא $f(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{\pi}{x}, x\epsilon[0,1] \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$, ונסתכל על ההרכבה $g \circ f$ על הקטע $[0,1]$.

ב. הוכיחו כי אם $[a,b] \xrightarrow{g} [c,d] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ כך שההרכבה $f \circ g$ מורכב , f בעלת השתנות חסומה על הקטע $[c,d]$ ו- g מונוטונית על הקטע $[a,b]$, ***אז*** ההרכבה $f \circ g$ היא בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$. (רמז:אפיון פונקציות בעלות השתנות חסומה כהפרש מונוטוניות...) .

הוכחה:

נניח למשל (בלי הגבלת הכלליות!) כי g מונוטונית עולה . f בעלת השתנות חסומה , לכן ניתן להציגה כהפרש שתי פונקציות מונוטוניות עולות : $f = h - k$

לכן קיים: $f\circ g=(h-k)\circ g=h\circ g-k\circ g$ כאשר בצד ימין קיבלנו הפרש שתי פונקציות מונוטוניות עולות (כי הרכבת מונוטוניות היא מונוטונית!) – ולכן ההפרש הוא פונקציה בעלת השתנות חסומה , כנדרש .

4.חשבו את האינטגרלים הקויים ביחס לאורך המסילה הבאים :

א. $\int (x+2y+3z)ds$ לאורך המסילה הבאה :

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\ t\\ 1\end{pmatrix}, t\in[0,1]$$

פתרון לפי הנוסחא לחישוב איטגרל קווי ביחס לאורך המסילה נקבל תשובה = $\sqrt{2}*5.5$

ב. $\int (x^2+y)ds$ לאורך מסילה שהיא השפה של הריבוע :

$\{(x,y):|x|+|y|=1\}$. (רמז: מיצאו הצגה פרמטרית של המסילה שתמונתה היא שפת הריבוע) .

פתרון מאדטיביות האינטגרל ניתן לחשב סכום האינטגרלים לאורך 4 צלעות הריבוע או להציג מסילה שתמונתה היא הריבוע ולחשב אינטגרל לאורכה – למשל :

$$\gamma(t)=\begin{cases}(t,t-1),\ t\in[0,1]\\ (2-t,t-1), t\in[1,2]\\ (2-t,3-t), t\in[2,3]\\ (t-4,3-t), t\in[3,4]\end{cases}$$

5.הוכיחו כי אם γ מסילה בעלת אורך אז מתקיים : $\int ds=L(\gamma)$, כאשר משמאל זהו אינטגרל של פונקציה מסויימת (איזו ?) ביחס לאורך המסילה γ , ומימין זהו אורך המסילה הנ"ל.

הוכחה: נחשב את האינטגרל הזה לפי הגדרה ותהי חלוקה כלשהיא של הקטע עליו מוגדרת המסילה $[a,b]$: $T: a=t_1<t_2<\cdots<t_n=b$. נחשב את סכום רימן המתאים לחלוקה לפי הגדרת אינטגרל לפי אורך מסילה:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(\tau_i))\Delta s_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i=\sum_{i=1}^{n} L(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]})=L(\gamma)$$

כשהשתמשנו באדיטיביות של אינטגרל קווי ביחס לאורך מסילה ובכך שהפונקציה עליה עושים אינטגרציה היא זהותית 1 .