- תרגיל: יהי T אופרטור נורמלי. הוכיחו:

1. $\ker T = \ker T^*$.
2. $ImT = ImT^*$
3. לכל k טבעי, $\ker T^k = \ker T$
4. לכל k טבעי, $ImT^k = ImT$.

פתרון:

1. ראשית נזכיר כי T הוא אופרטור נורמלי אם $TT^* = T^*T$
תכונה של אפרטור נורמלי: לכל $v \in V$,

$$||Tv|| = ||T^*v||$$

(למעשה זה אפילו שקול).

$$v \in \ker T \iff Tv = 0 \iff ||Tv|| = 0 \iff ||T^*v|| = 0 \iff T^*v = 0 \iff v \in \ker T^*$$

2. נזכיר כי בתרגול הקודם הוכחנו את הטענה הבאה:

$$(\ker T)^{\perp} = ImT^*$$

ולכן גם

$$(\ker T^*)^{\perp} = ImT$$

הוכחנו ב1:

$$\ker T = \ker T^*$$

לכן

$$(\ker T)^{\perp} = (\ker T^*)^{\perp}$$

$$ImT^* = ImT$$

3. ידוע ש $\ker T^m \subseteq \ker T^n$ לכל $m \leq n$. כי אם $T^m v = 0$, אז

$$T^n v = T^{n-m} T^m v = T^{n-m} 0 = 0$$

ראשית נוכיח ש$\ker T = \ker T^2$.

הכלה אחת אנחנו כבר יודעים, $\ker T \subseteq \ker T^2$.
יהי $v \in \ker T^2$. אז $T^2 v = 0$. כלומר, $T(T(v)) = 0$. כלומר, $Tv \in \ker T$. בסעיף 1 הוכחנו ש$\ker T = \ker T^*$. ולכן $Tv \in \ker T^*$. כלומר $T^*Tv = 0$

$$\langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^*Tv \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$$

לכן $Tv = 0$. כלומר, $v \in \ker T$.
נשים לב שאם T נורמלית, אז לכל n טבעי, T^n נורמלי. כי:

$$(T^n)^* T^n = (T^*)^n T^n = T^n (T^*)^n = T^n (T^n)^*$$

הוכחנו שעבור העתקה נורמלית, הגרעין שלה שווה לגרעין שלה בריבוע.
T נורמלית, אז גם T^2 נורמלי. ולכן $\ker T^2 = \ker T^4$. באותו אופן נקבל

$$\ker T = \ker T^{2^n}$$

לכל n.
דרך יותר אלגנטית:
נוכיח ש$\ker T^k = \ker T^{k+1}$.
נניח ש$v \in \ker T^{k+1}$, אז $T^{k+1} v = 0$. כלומר $T^k v \in \ker T$. ולכן הוא מוכל בגרעין של T^*. אז קיבלנו

$$T^* T^k v = 0$$

$$\langle T^k v, T^k v \rangle = \langle v, (T^*)^k T^k v \rangle = \langle v, (T^*)^{k-1} 0 \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$$

4. ידוע ש$ImT^k \subseteq ImT$. ממשפט הדרגה:

$$\dim \ker T + \dim ImT = \dim V$$

$$\dim \ker T^k + \dim ImT^k = \dim V$$

הגרעינים שווים, ולכן המימדים שלהם שווים, נקבל

$$\dim ImT = \dim ImT^k$$

ליכסון אוניטרי/אורתוגנלי

תרגיל: לכסנו אותרוגנלית את המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & 4 \\ -2 & 19 & -2 \\ 4 & -2 & 22 \end{pmatrix}$$

היא סימטרית, ולכן ידוע שאפשר לעשות את זה.
פולינום האופייני של המטריצה הוא

$$P_A(\lambda) = \left|\lambda I - \begin{pmatrix} 22 & -2 & 4 \\ -2 & 19 & -2 \\ 4 & -2 & 22 \end{pmatrix}\right| = (\lambda - 18)^2 (\lambda - 27)$$

המרחבים העצמים הם
$\lambda = 18$

$$V_{\lambda=18} = N\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right) = Span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$\lambda = 27$

$$V_{\lambda=27} = N\left(\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & -8 & -2 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}\right) = Span\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

כלומר אם היינו צריכים ליכסון רגיל אז המטריצה המלכסנת היתה פשוט

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ובנוסף נשים לב שווקטורים ממרחבים עצמיים שונים הם אורתוגונלים (רק כאשר A סמטרית) כלומר

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

לכן למעשה יש לבצע את גרם שמידט רק עבור המרחב העצמי $V_{\lambda=18}$ו-

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ולסיום צריך לנרמל את הווקטורים, וכעת יש לנו מטריצה אורתוגנלית $P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4.5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{4.5}} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{4.5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ המקיימת

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = P^t AP$$

תרגיל: תהי A מטריצה מרוכבת נורמלית. הוכיחו שיש לה שורש נורמלי. כלומר, יש מטריצה נורמלית B כך ש$B^2 = A$.
פתרון: מכיוון שA מעל $\mathbb{C}$ הפ"א מל"ל. והיא נורמלית מהנתון אז היא לכסינה אוניטרית.

$$A = PDP^*$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

נגדיר

$$D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

נגדיר

$$B = PD'P^*$$

B נורמלית, כי לפי הבניה שלה היא לכסינה אוניטרית. וידוע שמטריצה לכסינה אוניטרית היא נורמלית.

$$B^2 = (PD'P^*)^2 = PD'^2P^* = PDP^* = A$$

תרגיל: תהי A מטריצה מרוכבת נורמלית. אזי A צל"ע אמ"ם הע"ע של A ממשיים.
הוכחה: הוכחתם בהרצאה שלצל"ע יש ע"ע ממשיים.
כעת נניח שA נורמלית עם ע"ע ממשיים.
A נורמלית מעל המרוכבים, לכן פ"א מל"ל, אז היא לכסינה אוניטרית.

$$A = PDP^*$$

D היא מטריצה ממשית וסימטרית, ולכן $D = D^*$.

$$A^* = (PDP^*)^* = (P^*)^*D^*P^* = PDP^* = A$$

תרגיל: תהי $T : V \to V$ העתקה נורמלית עם פ"א מל"ל. ויהי W תת מרחב T אינוואריאנטי. אז יש צימצום

$$T|_W : W \to W$$

על V יש מכפלה פנימית אז היא משרה מכפלה פנימית על W.
הוכיחו ש $T|_W$ נורמלי.
פתרון: שקול להוכיח ש $T|_W$ הוא לכסין אוניטרי.
באחד התרגולים בעבר הוכחתם שאם T לכסינה ו W תת מרחב אינוואריאנטי, אז $T|_W$ לכסינה.
T נורמלית עם פ"א מל"ל ולכן לכסינה אוניטרית.
אז בפרט $T|_W$ לכסינה. יהיו w_1, w_2 ו"ע ביחס ל λ_1, λ_2 שונים. זה אומר ש w_1 ו w_2 הם ו"ע של T שמתאימים לע"ע שונים, ולכן הם מאונכים, כי T נורמלי.
ולכן אם נקח בסיס או"נ עבור כל ע"ע של $T|_W$, האיחוד שלהם יתן בסיס או"נ לכל W, וזה אומר ש $T|_W$ לכסינה אוניטרית.
תרגיל: יהי V ממ"פ ו $u, v \in V$ עם אותה נורמה. הוכיחו שיש $T : V \to V$ אוניטרית כך ש $T(u) = v$.
פתרון:
נחלק למקרים:
1. $u = v = 0$ נקח את $T = I$.
2. u, v ת"ל, $u, v \neq 0$. יש α כך ש $v = \alpha u$. $T = \alpha I$. היא אוניטרית כי

$$T^* = \bar{\alpha} I$$

$$TT^* = \alpha\bar{\alpha} I = |\alpha|^2 I = I$$

ידוע ש $||u|| = ||v||$ ולכן $|\alpha| = 1$.
3. v, u בת"ל.
נורמל את u, נקבל u', ונשלים אותו לבסיס או"נ, $B = \{u_1 = u', u_2, .., u_n\}$.
נורמל את v, נקבל v', ונשלים אותו לבסיס או"נ $B' = \{v_1 = v', v_2..., v_n\}$.
לפי משפט ההגדרה נגדיר T ששולחת את B ל B' כך ש u' הולך ל v'.
אז T שולחת את u ל v, כי יש להם את אותה נורמה.
T העבירה בסיס או"נ לבסיס או"נ.
לכן היא שומרת נורמה.

$$T(w) = T(\sum \alpha_i u_i) = \sum \alpha_i T u_i = \sum \alpha v_i$$

$$||w||^2 = ||\sum \alpha_i u_i||^2 = \sum |\alpha_i|^2$$

$$||Tw||^2 = ||\sum \alpha v_i||^2 = \sum |\alpha_i|^2$$

וזה בגלל ששניהם בסיסים או"נ.
ולכן T שומרת נורמה.
ולכן T אוניטרית.